

LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

TEORIA DE ESTRUTURAS

MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS DOS NÓS

SISTEMA ARTICULADO PLANO (SAP)

ISABEL ALVIM TELES

EXERCÍCIO PROPOSTO

Considere uma estrutura articulada, constituída por **6 barras** e **4 nós**.

Informação adicional: $EA = 3 \times 10^5 \text{ kN}$ para todas as barras.

$$\text{Barra 1: } \left[K_{\text{Local}}^1 \right] = \begin{bmatrix} 75\,000 & 0 & -75\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -75\,000 & 0 & 75\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad T^1 = -T^3$$

$$\text{Barra 2: } \left[K_{\text{Local}}^2 \right] = \left[K_{\text{Global}}^2 \right] = \left[K_{\text{Local}}^1 \right]$$

$$\text{Barra 3: } \alpha = 90^\circ; L_3 = 3 \text{ m}$$

Contribuição de cada uma das barras na matriz de rigidez da estrutura:

$$\left[K_G \right]^{\text{EST}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} (1)+(4)+(5) & (1)+(4)+(5) & (1) & (1) & (5) & (5) & (4) & (4) \\ (1)+(4)+(5) & (1)+(4)+(5) & (1) & (1) & (5) & (5) & (4) & (4) \\ (1) & (1) & (1)+(2)+(6) & (1)+(2)+(6) & (2) & (2) & (6) & (6) \\ (1) & (1) & (1)+(2)+(6) & (1)+(2)+(6) & (2) & (2) & (6) & (6) \\ (5) & (5) & (2) & (2) & (2)+(5)+(3) & (2)+(5)+(3) & (3) & (3) \\ (5) & (5) & (2) & (2) & (2)+(5)+(3) & (2)+(5)+(3) & (3) & (3) \\ (4) & (4) & (6) & (6) & (3) & (3) & (3)+(4)+(6) & (3)+(4)+(6) \\ (4) & (4) & (6) & (6) & (3) & (3) & (3)+(4)+(6) & (3)+(4)+(6) \end{bmatrix} \end{matrix}$$

- a) Desenhe e cote a estrutura.
- b) Sabendo que se podem individualizar as partições da matriz de rigidez na forma abaixo indicada, represente os apoios da estrutura.

$$\left[K_G \right]^{\text{EST}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 3 & 4 & 6 & 2 & 5 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{bmatrix} \end{matrix}$$

- c) Considere um assentamento de apoio de 1mm na direção do grau de liberdade Δ_5 e as seguintes forças concentradas: Direção do grau de liberdade Δ_1 : $F = 50 \text{ kN}$
Direção do grau de liberdade Δ_4 : $F = -150 \text{ kN}$
Determine os deslocamentos dos nós da estrutura.
- d) Determine as reações no apoio duplo, usando apenas o número necessário de equações.
- e) Determine os esforços nas barras.

RESOLUÇÃO

- MATRIZ DE RIGIDEZ ELEMENTAR – SISTEMA DE EIXOS LOCAL: K_L**

$$[K_L] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO: T**

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

e

- MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO TRANSPOSTA: T^T**

$$[T]^T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

- MATRIZ DE RIGIDEZ ELEMENTAR – SISTEMA DE EIXOS GLOBAL: K_G**

$$[K_G] = [T]^T [K_L] [T]$$

Alínea a)

Barra 1

$$[K_{Local}^1] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75\,000 & 0 & -75\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -75\,000 & 0 & 75\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

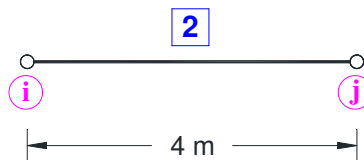
$$\frac{EA}{L} = 75\,000 \Rightarrow L = \frac{75\,000}{EA} = \frac{75\,000}{3 \times 10^5} = 4 \text{ m}$$

Barra 2

$$\begin{bmatrix} K_{Local}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{Local}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75\,000 & 0 & -75\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -75\,000 & 0 & 75\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{EA}{L} = 75\,000 \Rightarrow L = \frac{75\,000}{EA} = \frac{75\,000}{3 \times 10^5} = 4 \text{ m}$$

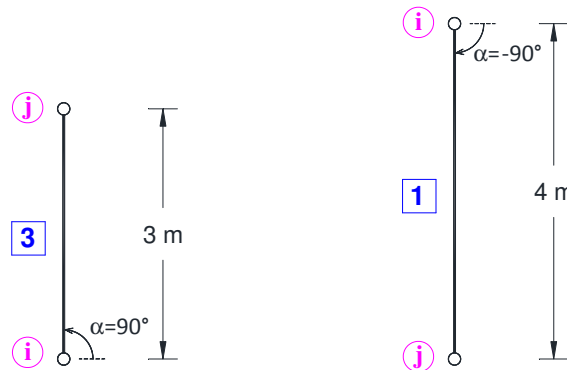
$$\begin{bmatrix} K_{Local}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{Global}^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Barra 2 é horizontal com o nó menor (i) à esquerda.}$$



Barra 3

$$\alpha = 90^\circ; L_3 = 3 \text{ m} \Rightarrow \text{Barra 3 é vertical com o nó menor (i) em baixo.}$$

$$\underline{T^1 = -T^3} \Rightarrow \alpha = -90^\circ \Rightarrow \text{Barra 1 é vertical com o nó menor (i) em cima}$$



A partir da matriz de rigidez global da estrutura determinam-se os nós de cada uma das barras:

Barra 1 - Nós 1 – 2 (graus de liberdade: $\Delta 1, \Delta 2 - \Delta 3, \Delta 4$)

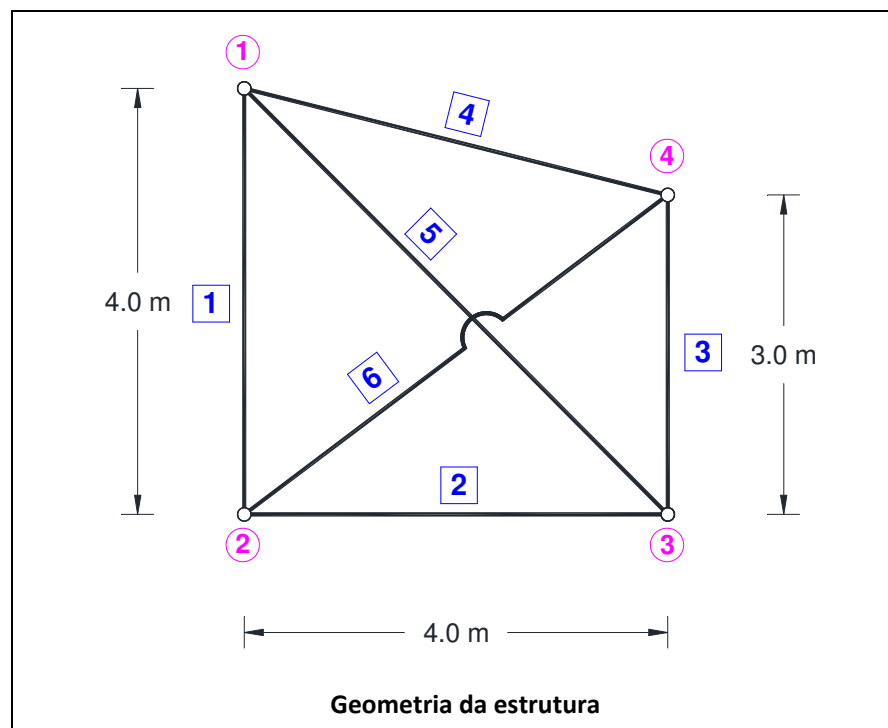
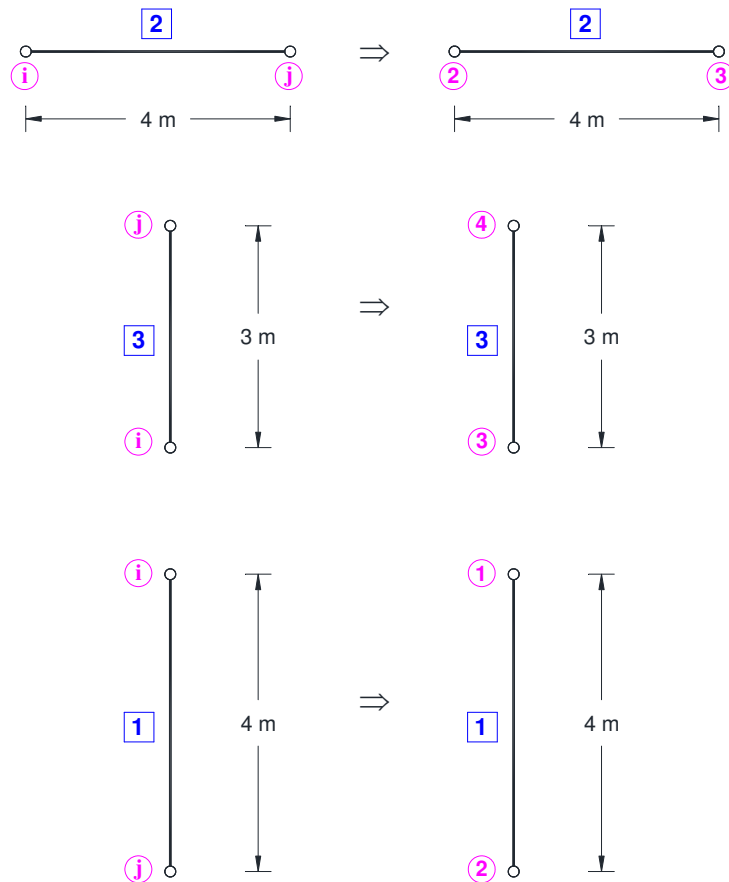
Barra 2 - Nós 2 – 3 (graus de liberdade: $\Delta 3, \Delta 4 - \Delta 5, \Delta 6$)

Barra 3 - Nós 3 – 4 (graus de liberdade: $\Delta 5, \Delta 6 - \Delta 7, \Delta 8$)

Barra 4 - Nós 1 – 4 (graus de liberdade: $\Delta 1, \Delta 2 - \Delta 7, \Delta 8$)

Barra 5 - Nós 1 – 3 (graus de liberdade: $\Delta 1, \Delta 2 - \Delta 5, \Delta 6$)

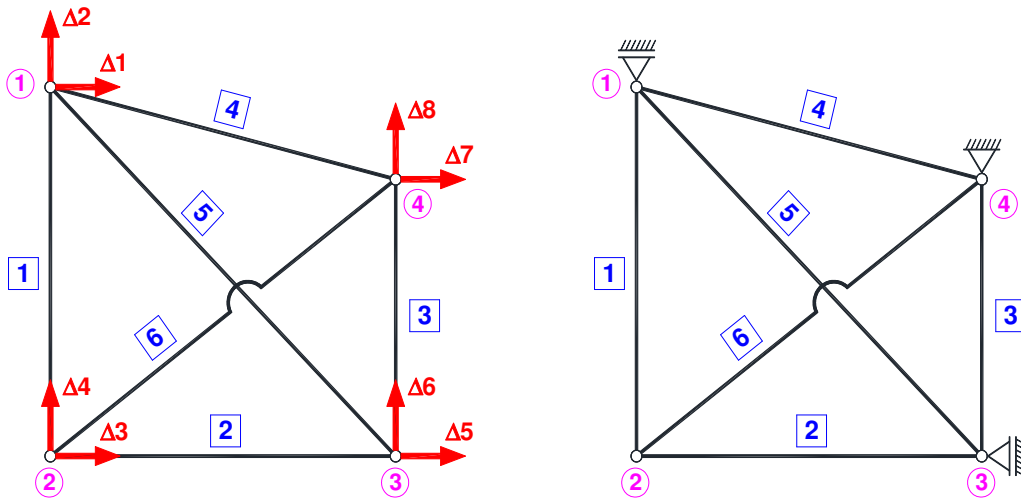
Barra 6 - Nós 2 – 4 (graus de liberdade: $\Delta 3, \Delta 4 - \Delta 7, \Delta 8$)



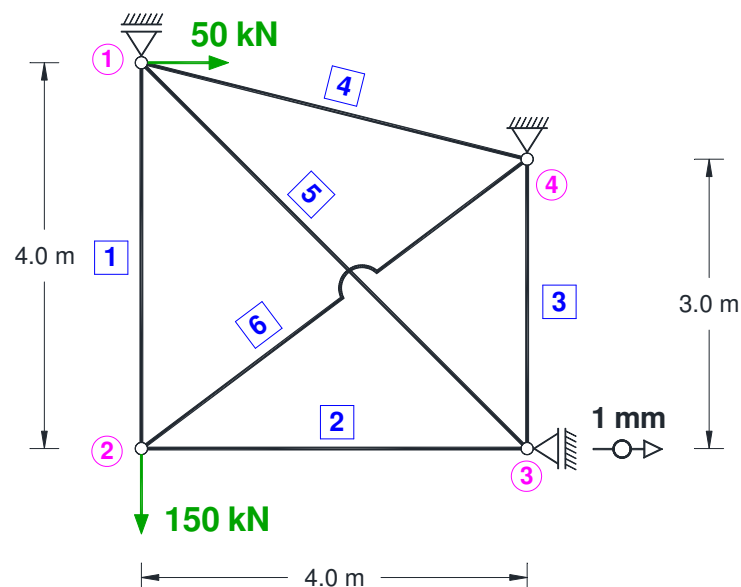
Alínea b)

$$[K_G]^{EST} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 3 & 4 & 6 & 2 & 5 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cc|cc} & & & \\ & K_{LL} & & K_{LF} \\ \hline & & K_{FL} & \\ & & & K_{FF} \end{array} \right] \end{matrix}$$

Analisando a matriz de rigidez global da estrutura acima representada conclui-se que os graus de liberdade fixos (apoios) são : Δ_2 , Δ_5 , Δ_7 e Δ_8 .



Alínea c)



Barra 1 $\left\{ \begin{array}{l} EA = 3 \times 10^5 \text{ kN} \\ L = 5 \text{ m} \end{array} \right.$ $\alpha = -90 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha = 0 \\ \sin \alpha = -1 \end{array} \right.$

$$[K_L^1] = \begin{bmatrix} 75\,000 & 0 & -75\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -75\,000 & 0 & 75\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Barra 1 - Nós 1 - 2 $[K_G] = [T]^T [K_L] [T]$

$$[K_G^1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 75\,000 & 0 & -75\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -75\,000 & 0 & 75\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K_G^1] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 75\,000 & 0 & -75\,000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -75\,000 & 0 & 75\,000 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Barra 2 $EA = 3 \times 10^5 \text{ kN}$
 $L = 4 \text{ m}$

$$\alpha = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 1 \\ \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

$$[K_L^2] = \begin{bmatrix} 75\,000 & 0 & -75\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -75\,000 & 0 & 75\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [K_G^2]$$

Barra 2 - Nós 2 - 3

$$[K_G^2] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 75\,000 & 0 & -75\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -75\,000 & 0 & 75\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Barra 3 $EA = 3 \times 10^5 \text{ kN}$
 $L = 3 \text{ m}$

$$\alpha = 90^\circ \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0 \\ \sin \alpha = 1 \end{cases}$$

$$[K_L^3] = \begin{bmatrix} 100\,000 & 0 & -100\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -100\,000 & 0 & 100\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Barra 3 - Nós 3 - 4

$$[K_G] = [T]^T [K_L] [T]$$

$$[K_G^3] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 100\,000 & 0 & -100\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -100\,000 & 0 & 100\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K_G^3] = \begin{matrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100\,000 & 0 & -100\,000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -100\,000 & 0 & 100\,000 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Barra 4 $EA = 3 \times 10^5 \text{ kN}$ $\alpha = -\arctg\left(\frac{1}{4}\right) = -14,036^\circ \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0,9701 \\ \sin \alpha = -0,2425 \end{cases}$
 $L = \sqrt{17} = 4,123 \text{ m}$

$$[K_L^4] = \begin{bmatrix} 72\,760,688 & 0 & -72\,760,688 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -72\,760,688 & 0 & 72\,760,688 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9701 & -0,2425 & 0 & 0 \\ 0,2425 & 0,9701 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9701 & -0,2425 \\ 0 & 0 & 0,2425 & 0,9701 \end{bmatrix}$$

Barra 4 - Nós 1 - 4 $[K_G] = [T]^T [K_L] [T]$

$$[K_G^4] = \begin{bmatrix} 0,9701 & 0,2425 & 0 & 0 \\ -0,2425 & 0,9701 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9701 & 0,2425 \\ 0 & 0 & -0,2425 & 0,9701 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 72\,760,688 & 0 & -72\,760,688 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -72\,760,688 & 0 & 72\,760,688 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,9701 & -0,2425 & 0 & 0 \\ 0,2425 & 0,9701 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9701 & -0,2425 \\ 0 & 0 & 0,2425 & 0,9701 \end{bmatrix}$$

$$[K_G^4] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 8 \\ 1 & 68\,480,647 & -17\,120,162 & -68\,480,647 & 17\,120,162 \\ 2 & -17\,120,162 & 4\,280,040 & 17\,120,162 & -4\,280,040 \\ 7 & -68\,480,647 & 17\,120,162 & 68\,480,647 & -17\,120,162 \\ 8 & 17\,120,162 & -4\,280,040 & -17\,120,162 & 4\,280,040 \end{bmatrix}$$

Barra 5 $\left\{ \begin{array}{l} EA = 3 \times 10^5 \text{ kN} \\ L = 4\sqrt{2} = 5,657 \text{ m} \end{array} \right. \quad \alpha = -45^\circ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,7071 \\ \sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -0,7071 \end{array} \right.$

$$[K_L^5] = \begin{bmatrix} 53\,033,009 & 0 & -53\,033,009 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -53\,033,009 & 0 & 53\,033,009 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7071 & -0,7071 & 0 & 0 \\ 0,7071 & 0,7071 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7071 & -0,7071 \\ 0 & 0 & 0,7071 & 0,7071 \end{bmatrix}$$

Barra 5 - Nós 1 – 3 $[K_G] = [T]^T [K_L] [T]$

$$[K_G^5] = \begin{bmatrix} 0,7071 & 0,7071 & 0 & 0 \\ -0,7071 & 0,7071 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7071 & 0,7071 \\ 0 & 0 & -0,7071 & 0,7071 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 53\,033,009 & 0 & -53\,033,009 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -53\,033,009 & 0 & 53\,033,009 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,7071 & -0,7071 & 0 & 0 \\ 0,7071 & 0,7071 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7071 & -0,7071 \\ 0 & 0 & 0,7071 & 0,7071 \end{bmatrix}$$

$$[K_G^5] = \begin{bmatrix} \overset{1}{26\,516,504} & \overset{2}{-26\,516,504} & \overset{5}{-26\,516,504} & \overset{6}{26\,516,504} \\ \overset{2}{-26\,516,504} & \overset{2}{26\,516,504} & \overset{5}{26\,516,504} & \overset{6}{-26\,516,504} \\ \overset{5}{-26\,516,504} & \overset{5}{26\,516,504} & \overset{5}{26\,516,504} & \overset{6}{-26\,516,504} \\ \overset{6}{26\,516,504} & \overset{6}{-26\,516,504} & \overset{6}{-26\,516,504} & \overset{6}{26\,516,504} \end{bmatrix}$$

Barra 6 $\left\{ \begin{array}{l} EA = 3 \times 10^5 \text{ kN} \\ L = 5 \text{ m} \end{array} \right.$ $\alpha = 36,870^\circ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha = 0,8 \\ \sin \alpha = 0,6 \end{array} \right.$

$$[K_L^6] = \begin{bmatrix} 60\,000 & 0 & -60\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -60\,000 & 0 & 60\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

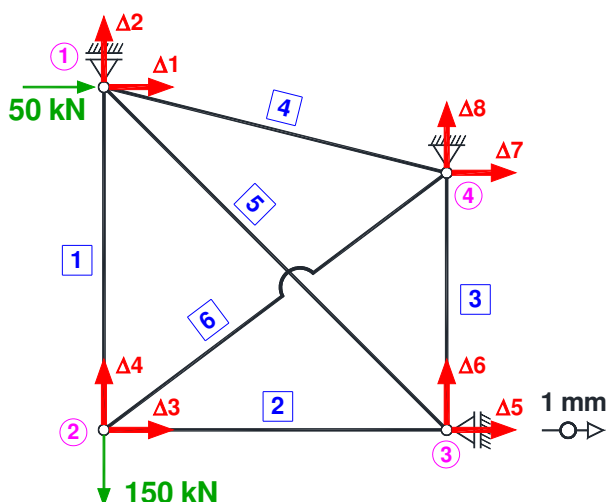
$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 & 0 & 0 \\ -0,6 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0,6 \\ 0 & 0 & -0,6 & 0,8 \end{bmatrix}$$

Barra 6 - Nós 2 - 4 $[K_G] = [T]^T [K_L] [T]$

$$[K_G^6] = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,6 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & -0,6 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0,8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 60\,000 & 0 & -60\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -60\,000 & 0 & 60\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 & 0 & 0 \\ -0,6 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0,6 \\ 0 & 0 & -0,6 & 0,8 \end{bmatrix}$$

$$[K_G^6] = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 & 8 \\ 3 & 38\,400 & 28\,800 & -38\,400 \\ 4 & 28\,800 & 21\,600 & -28\,800 \\ 7 & -38\,400 & -28\,800 & 38\,400 \\ 8 & -28\,800 & -21\,600 & 28\,800 \end{bmatrix}$$

- Graus de liberdade da estrutura



- Matriz de rigidez global da estrutura

Contribuição de cada uma das barras na matriz de rigidez global da estrutura:

$$[K_G]^{EST} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1+4+5 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 1+2+6 & 2 & 6 \\ 5 & 2 & 2+3+5 & 6 \\ 4 & 6 & 6 & 3+4+6 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

<i>K_G - Estrutura</i>								
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	94 997,151	-43 636,666	0	0	-26 516,504	26 516,504	-68 480,647	17 120,162
2	-43 636,666	105 796,545	0	-75 000	26 516,504	-26 516,504	17 120,162	-4 280,040
3	0	0	113 400	28 800	-75 000	0	-38 400	-28 800
4	0	-75 000	28 800	96 600	0	0	-28 800	-21 600
5	-26 516,504	26 516,504	-75 000	0	101 516,504	-26 516,504	0	0
6	26 516,504	-26 516,504	0	0	-26 516,504	126 516,504	0	-100 000
7	-68 480,647	17 120,162	-38 400	-28 800	0	0	106 880,647	11 679,838
8	17 120,162	-4 280,040	-28 800	-21 600	0	-100 000	11 679,838	125 880,040

• Vetor dos deslocamentos	• Vetor das forças exteriores	• Vetor das reações
$ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \begin{bmatrix} \Delta 1 \\ \Delta 2 \\ \Delta 3 \\ \Delta 4 \\ \Delta 5 \\ \Delta 6 \\ \Delta 7 \\ \Delta 8 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \begin{bmatrix} \Delta 1 \\ 0 \\ \Delta 3 \\ \Delta 4 \\ 0,001 \\ \Delta 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} $	$ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \begin{bmatrix} 50 \\ 0 \\ 0 \\ -150 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} $	$ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ R2 \\ 0 \\ 0 \\ R5 \\ 0 \\ R7 \\ R8 \end{bmatrix} $

$$[K_G] \times [\Delta_G] = [F_G] + [R_G]$$

K_G								x	Δ_G	=	F_G	+	R_G
1	2	3	4	5	6	7	8		1		1		1
94 997,151	-43 636,666	0	0	-26 516,504	26 516,504	-68 480,647	17 120,162		$\Delta 1$		50		0
-43 636,666	105 796,545	0	-75 000	26 516,504	-26 516,504	17 120,162	-4 280,040		0		0		R2
0	0	113 400	28 800	-75 000	0	-38 400	-28 800		$\Delta 3$		0		0
0	-75 000	28 800	96 600	0	0	-28 800	-21 600		$\Delta 4$		-150		0
-26 516,504	26 516,504	-75 000	0	101 516,504	-26 516,504	0	0		0,001		0		R5
26 516,504	-26 516,504	0	0	-26 516,504	126 516,504	0	-100 000		$\Delta 6$		0		0
-68 480,647	17 120,162	-38 400	-28 800	0	0	106 880,647	11 679,838		0		0		R7
17 120,162	-4 280,040	-28 800	-21 600	0	-100 000	11 679,838	125 880,040		0		0		R8

• Rearranjo do sistema de equações

Agrupamentos dos graus de liberdade correspondentes a nós livres e nós fixos

K_G								x	Δ_G	=	F_G	+	R_G
1	3	4	6	2	5	7	8		1		1		1
K_{LL}				K_{LF}					Δ_{Li}		F_{Li}		$\bar{0}$
K_{FL}				K_{FF}					Δ_F		F_F		R_F

TEORIA DE ESTRUTURAS

ISABEL ALVIM TELES

K_G								x	Δ_G	=	F_G	+	R_G
1	3	4	6	2	5	7	8						
94 997,151	0	0	26 516,504	-43 636,666	-26 516,504	-68 480,647	17 120,162	1	Δ_1	1	50	1	0
0	113 400	28 800	0	0	-75 000	-38 400	-28 800	3	Δ_3	3	0	3	0
0	28 800	96 600	0	-75 000	0	-28 800	-21 600	4	Δ_4	4	-150	4	0
26 516,504	0	0	126 516,504	-26 516,504	-26 516,504	0	-100 000	6	Δ_6	6	0	6	0
-43 636,666	0	-75 000	-26 516,504	105 796,545	26 516,504	17 120,162	-4 280,040	2	0	2	0	2	R2
-26 516,504	-75 000	0	-26 516,504	26 516,504	101 516,504	0	0	5	0,001	5	0	5	R5
-68 480,647	-38 400	-28 800	0	17 120,162	0	106 880,647	11 679,838	7	0	7	0	7	R7
17 120,162	-28 800	-21 600	-100 000	-4 280,040	0	11 679,838	125 880,040	8	0	8	0	8	R8

- **Determinação dos deslocamentos dos nós livres:** $[\Delta_{Li}]$

$$[K_{LL}] \times [\Delta_{Li}] + [K_{LF}] \times [\Delta_F] = [F_{Li}]$$

K_{LL}				x	Δ_{Li}	+	K_{LF}				x	Δ_F	=	F_{Li}
94 997,151	0	0	26 516,504		Δ_1		-43 636,666	-26 516,504	-68 480,647	17 120,162		0		50
0	113 400	28 800	0		Δ_3		0	-75 000	-38 400	-28 800		0,001		0
0	28 800	96 600	0		Δ_4		-75 000	0	-28 800	-21 600		0		-150
26 516,504	0	0	126 516,504		Δ_6		-26 516,504	-26 516,504	0	-100 000		0		0

$$[K_{LL}] \times [\Delta_{Li}] = [F_{Li}] - [K_{LF}] \times [\Delta_F]$$

K_{LL}				x	Δ_{Li}	=	$F_{Li} - K_{LF} \times \Delta_F$
94 997,151	0	0	26 516,504		Δ_1		76,5165
0	113 400	28 800	0		Δ_3		75
0	28 800	96 600	0		Δ_4		-150
26 516,504	0	0	126 516,504		Δ_6		26,5165

Resolvendo o sistema de equações: $[\Delta_{Li}] \Rightarrow$

$$\begin{cases} \Delta_1 = 7,93 \times 10^{-4} \text{ m} = 0,793 \text{ mm} \rightarrow \\ \Delta_3 = 1,14 \times 10^{-3} \text{ m} = 1,14 \text{ mm} \rightarrow \\ \Delta_4 = -1,89 \times 10^{-3} \text{ m} = -1,89 \text{ mm} \downarrow \\ \Delta_6 = 4,33 \times 10^{-5} \text{ m} = 0,0433 \text{ mm} \uparrow \end{cases}$$

Vetor dos deslocamentos: $[\Delta] =$

Δ_1	$7,93 \times 10^{-4}$
Δ_2	0
Δ_3	$1,14 \times 10^{-3}$
Δ_4	$-1,89 \times 10^{-3}$
Δ_5	$1,00 \times 10^{-3}$
Δ_6	$4,33 \times 10^{-5}$
Δ_7	0
Δ_8	0

unidades: **metros**

Alínea d)

- **Determinação das reações:** $[R_F]$

$$[K_{FL}] \times [\Delta_{Li}] + [K_{FF}] \times [\Delta_F] = [F_F] + [R_F]$$

K_{FL}				$\times$	Δ_{Li}	+	K_{FF}				$\times$	Δ_F	=	F_F	+	R_F
-43 636,666	0	-75 000	-26 516,504		Δ_1		105 796,545	26 516,504	17 120,162	-4 280,040		0		0		R2
-26 516,504	-75 000	0	-26 516,504		Δ_3		26 516,504	101 516,504	0	0		0,001		0		R5
-68 480,647	-38 400	-28 800	0		Δ_4		17 120,162	0	106 880,647	11 679,838		0		0		R7
17 120,162	-28 800	-21 600	-100 000		Δ_6		-4 280,040	0	11 679,838	125 880,040		0		0		R8

$$[K_{FL}] \times [\Delta_{Li}] + [K_{FF}] \times [\Delta_F] - [F_F] = [R_F]$$

K_{FL}				$\times$	Δ_{Li}	+	$K_{FF} \times \Delta_F - F_F$		=	R_F
-43 636,666	0	-75 000	-26 516,504		$7,93 \times 10^{-4}$		76,5165		R2	
-26 516,504	-75 000	0	-26 516,504		$1,14 \times 10^{-3}$		75		R5	
-68 480,647	-38 400	-28 800	0		$-1,89 \times 10^{-3}$		-150		R7	
17 120,162	-28 800	-21 600	-100 000		$4,33 \times 10^{-5}$		26,5165		R8	

Reações:

$$\left\{ \begin{array}{l} R2 = 132,75 \text{ kN} \quad \uparrow \\ R5 = -6,34 \text{ kN} \quad \leftarrow \\ R7 = -43,66 \text{ kN} \quad \leftarrow \\ R8 = 17,25 \text{ kN} \quad \uparrow \end{array} \right.$$

Vetor das reações: $[R_F] = \begin{bmatrix} R2 \\ R5 \\ R7 \\ R8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 132,75 \\ -6,34 \\ -43,66 \\ 17,25 \end{bmatrix}$ unidades: **kN**

Alínea e)

• **Determinação dos esforços nas barras**

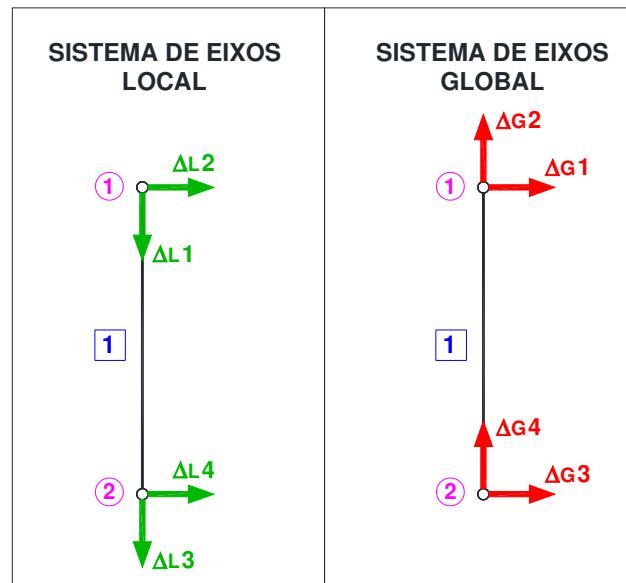
$$[F_L] = [K_L] \times [\Delta_L] = [K_L] \times [T] \times [\Delta_G]$$

Barra 1 - Nós 1 – 2 $\Rightarrow$ Deslocamentos no referencial geral: $\Delta G1, \Delta G2 - \Delta G3, \Delta G4$

$$[F_L] = [K_L] \times [\Delta_L]$$

Para a **barra 1** é fácil determinar os deslocamentos no referencial local (ver figura):

$$\begin{aligned}\Delta L1 &= -\Delta G2 \\ \Delta L2 &= \Delta G1 \\ \Delta L3 &= -\Delta G4 \\ \Delta L4 &= \Delta G3\end{aligned}$$



$$[\Delta_L^{\text{barra 1}}] = \begin{bmatrix} \Delta L1 \\ \Delta L2 \\ \Delta L3 \\ \Delta L4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7,93 \times 10^{-4} \\ 1,89 \times 10^{-3} \\ 1,14 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$[F_L^1] = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75\,000 & 0 & -75\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -75\,000 & 0 & 75\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 7,93 \times 10^{-4} \\ 1,89 \times 10^{-3} \\ 1,14 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -142 \\ 0 \\ 142 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Na **barra 1** está a atuar um esforço de tração de **142 kN**.

Barra 2 - Nós **2** – **3** $\Rightarrow$ Deslocamentos (referencial geral): $\Delta G3, \Delta G4 - \Delta G5, \Delta G6$

$$[F_L] = [K_L] \times [\Delta_L]$$

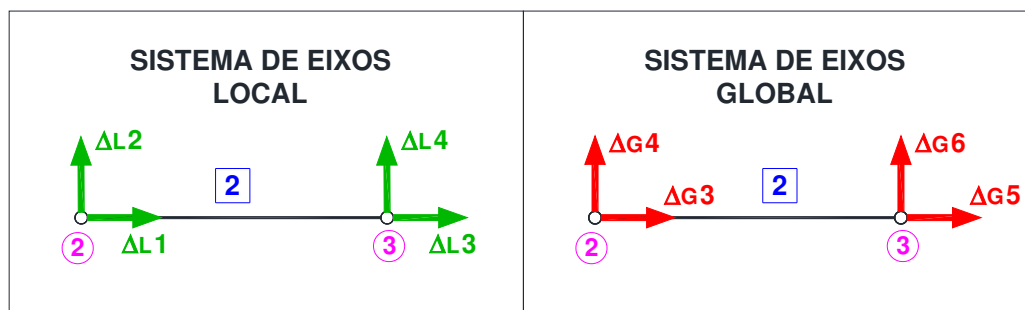
Para a **barra 2** é fácil determinar os deslocamentos no referencial local (ver figura):

$$\Delta L1 = \Delta G3$$

$$\Delta L2 = \Delta G4$$

$$\Delta L3 = \Delta G5$$

$$\Delta L4 = \Delta G6$$



$$[\Delta_{\text{barra 2}}] = \begin{bmatrix} \Delta L1 \\ \Delta L2 \\ \Delta L3 \\ \Delta L4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,14 \times 10^{-3} \\ -1,89 \times 10^{-3} \\ 1,00 \times 10^{-3} \\ 4,33 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

$$[F_L^2] = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75\,000 & 0 & 75\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -75\,000 & 0 & 75\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,14 \times 10^{-3} \\ -1,89 \times 10^{-3} \\ 1,00 \times 10^{-3} \\ 4,33 \times 10^{-5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10,67 \\ 0 \\ -10,67 \\ 0 \end{bmatrix}$$

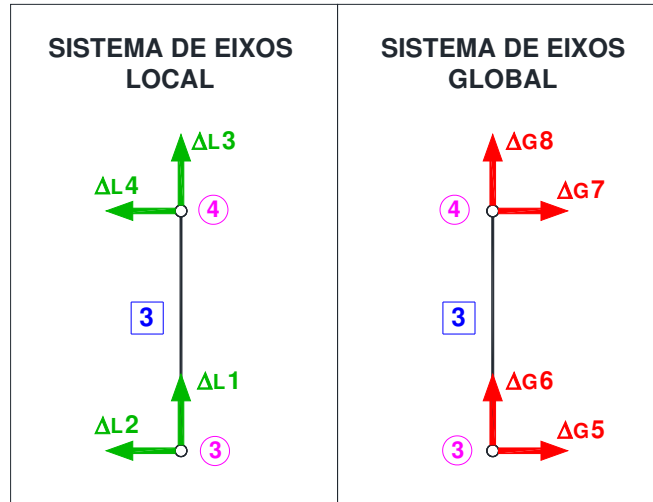
Na **barra 2** está a atuar um esforço de compressão de **10,67 kN**.

Barra 3 - Nós **3** - **4** $\Rightarrow$ Deslocamentos no referencial geral: **$\Delta G5, \Delta G6 - \Delta G7, \Delta G8$**

$$[F_L] = [K_L] \times [\Delta_L]$$

Para a **barra 3** é fácil determinar os deslocamentos no referencial local (ver figura):

$$\begin{aligned}\Delta L1 &= \Delta G6 \\ \Delta L2 &= -\Delta G5 \\ \Delta L3 &= \Delta G8 \\ \Delta L4 &= -\Delta G7\end{aligned}$$



$$[\Delta_L^{\text{barra 3}}] = \begin{bmatrix} \Delta L1 \\ \Delta L2 \\ \Delta L3 \\ \Delta L4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,33 \times 10^{-5} \\ -1,00 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[F_L^3] = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100\,000 & 0 & -100\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -100\,000 & 0 & 100\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4,33 \times 10^{-5} \\ -1,00 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,33 \\ 0 \\ -4,33 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Na **barra 3** está a atuar um esforço de compressão de **4,33 kN**.

Barra 4 - Nós 1 – 4 $\Rightarrow$ Deslocamentos no referencial geral: $\Delta G1, \Delta G2 - \Delta G7, \Delta G8$

$$[F_L] = [K_L] \times [T] \times [\Delta_G]$$

$$[F_L^4] = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 72\,760,688 & 0 & -72\,760,688 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -72\,760,688 & 0 & 72\,760,688 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,9701 & -0,2425 & 0 & 0 \\ 0,2425 & 0,9701 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9701 & -0,2425 \\ 0 & 0 & 0,2425 & 0,9701 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 7,93 \times 10^{-4} \\ 2 & 0 \\ 7 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56,003 \\ 0 \\ -56,003 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Na **barra 4** está a atuar um esforço de compressão de 56,00 kN.

Barra 5 - Nós 1 – 3 $\Rightarrow$ Deslocamentos no referencial geral: $\Delta G1, \Delta G2 - \Delta G5, \Delta G6$

$$[F_L] = [K_L] \times [T] \times [\Delta_G]$$

$$[F_L^5] = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53\,033,009 & 0 & -53\,033,009 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -53\,033,009 & 0 & 53\,033,009 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,7071 & 0,7071 & 0 & 0 \\ -0,7071 & 0,7071 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7071 & 0,7071 \\ 0 & 0 & -0,7071 & 0,7071 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 7,93 \times 10^{-4} \\ 2 & 0 \\ 5 & 1,00 \times 10^{-3} \\ 6 & 4,33 \times 10^{-5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6,125 \\ 0 \\ 6,125 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Na **barra 5** está a atuar um esforço de tração de 6,125 kN.

Barra 6 - Nós 2 – 4 $\Rightarrow$ Deslocamentos no referencial geral: $\Delta G3, \Delta G4 - \Delta G7, \Delta G8$

$$[F_L] = [K_L] \times [T] \times [\Delta_G]$$

$$[F_L^6] = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60\,000 & 0 & -60\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -60\,000 & 0 & 60\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 & 0 & 0 \\ -0,6 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0,6 \\ 0 & 0 & -0,6 & 0,8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 1,14 \times 10^{-3} \\ 4 & -1,89 \times 10^{-3} \\ 7 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13,333 \\ 0 \\ 13,333 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Na **barra 6** está a atuar um esforço de tração de 13,33 kN.