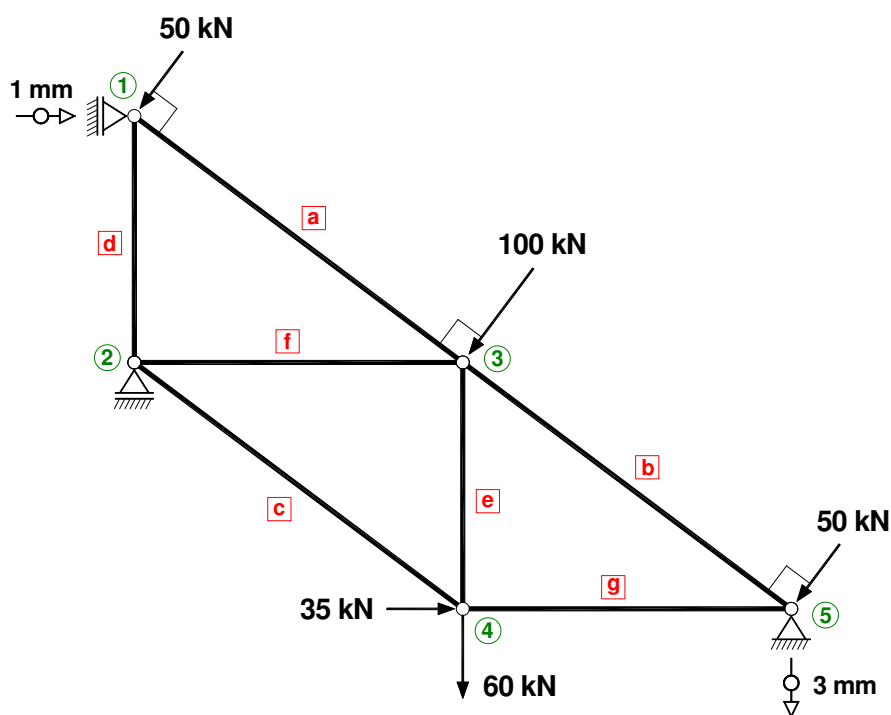


LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

TEORIA DE ESTRUTURAS

MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS DOS NÓS

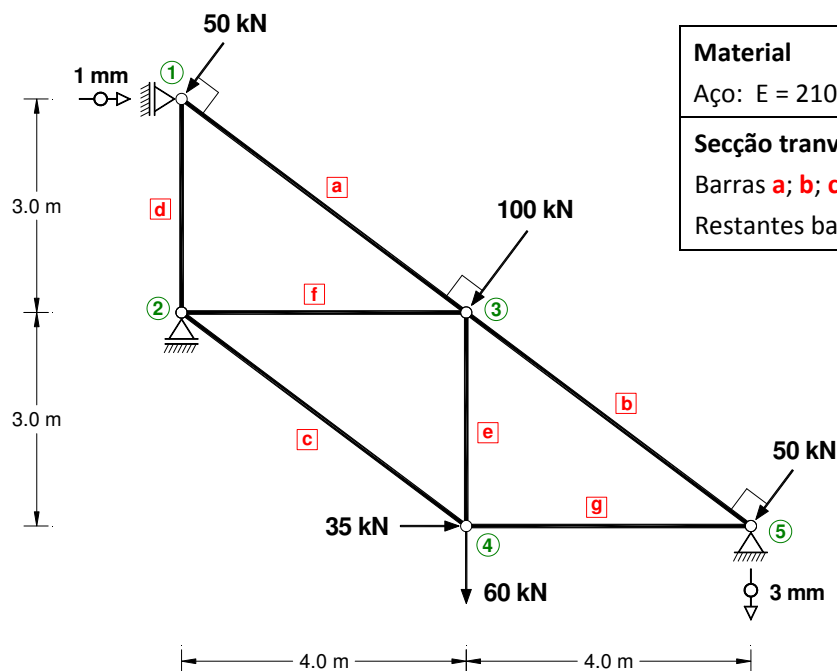


SISTEMA ARTICULADO PLANO (SAP)

ISABEL ALVIM TELES

EXERCÍCIO PROPOSTO

Considere a estrutura representada na figura.



Material

Aço: $E = 210 \text{ GPa}$

Secção transversal

Barras **a**; **b**; **c**: área = 10 cm^2

Restantes barras: área = 5 cm^2

Responda às alíneas aplicando o Método dos Deslocamentos.

- Determine os deslocamentos dos nós da estrutura;
- Determine as reações nos apoios;
- Determine os esforços nas barras.

RESOLUÇÃO

• MATRIZ DE RIGIDEZ ELEMENTAR – SISTEMA DE EIXOS LOCAL: K_L

$$[K_L] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

• **MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO: T**

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

e **MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO TRANSPOSTA: T^T**

$$[T]^T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

• **MATRIZ DE RIGIDEZ ELEMENTAR – SISTEMA DE EIXOS GLOBAL: K_G**

$$[K_G] = [T]^T [K_L] [T]$$

Alínea a)

• **Matrizes de rigidez das barras no sistema de eixos local: [K_L]**

• **Matrizes de transformação: [T]**

Barras a, b, c	E = 210 x 10 ⁶ kPa	$\alpha = -36,87^\circ \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0,8 \\ \sin \alpha = -0,6 \end{cases}$
	A = 10 x 10 ⁻⁴ m ²	
	L = 5 m	

$$[K_L^a] = [K_L^b] = [K_L^c] = \begin{bmatrix} 42\,000 & 0 & -42\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -42\,000 & 0 & 42\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,6 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & -0,6 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0,8 \end{bmatrix}$$

Barras d, e

$$\begin{cases} E = 210 \times 10^6 \text{ kPa} \\ A = 5 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \\ L = 3 \text{ m} \end{cases} \quad \alpha = -90^\circ \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0 \\ \sin \alpha = -1 \end{cases}$$

$$[K_L^d] = [K_L^e] = \begin{bmatrix} 35\,000 & 0 & -35\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -35\,000 & 0 & 35\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

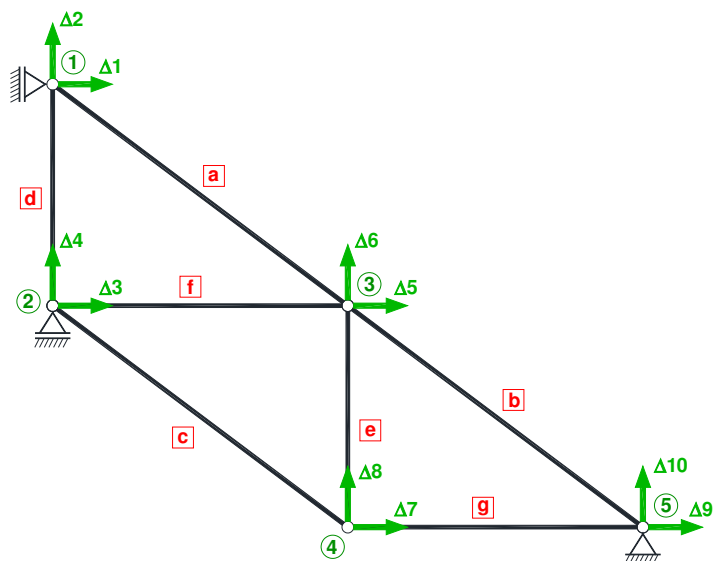
Barras f, g

$$\begin{cases} E = 210 \times 10^6 \text{ kPa} \\ A = 5 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \\ L = 4 \text{ m} \end{cases} \quad \alpha = 0^\circ \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 1 \\ \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

$$[K_L^f] = [K_L^g] = \begin{bmatrix} 26\,250 & 0 & -26\,250 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -26\,250 & 0 & 26\,250 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[T] = [I] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• Graus de liberdade da estrutura



• Matrizes de rigidez das barras no sistema de eixos global: $[K_G] = [T]^T [K_L] [T]$

Barra a - Nós 1 – 3

$$[K_G^a] = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,6 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & -0,6 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0,8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 42\,000 & 0 & -42\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -42\,000 & 0 & 42\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,8 & -0,6 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & -0,6 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0,8 \end{bmatrix}$$

$$[K_G^a] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 26\,880 & -20\,160 & -26\,880 & 20\,160 \\ -20\,160 & 15\,120 & 20\,160 & -15\,120 \\ -26\,880 & 20\,160 & 26\,880 & -20\,160 \\ 20\,160 & -15\,120 & -20\,160 & 15\,120 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Barra b - Nós 3 – 5

$$[K_G^b] = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,6 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & -0,6 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0,8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 42\,000 & 0 & -42\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -42\,000 & 0 & 42\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,8 & -0,6 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & -0,6 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0,8 \end{bmatrix}$$

$$[K_G^b] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 5 & 6 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 26\,880 & -20\,160 & -26\,880 & 20\,160 \\ -20\,160 & 15\,120 & 20\,160 & -15\,120 \\ -26\,880 & 20\,160 & 26\,880 & -20\,160 \\ 20\,160 & -15\,120 & -20\,160 & 15\,120 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Barra c - Nós 2 – 4

$$[K_G^c] = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,6 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & -0,6 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0,8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 42\,000 & 0 & -42\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -42\,000 & 0 & 42\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,8 & -0,6 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & -0,6 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0,8 \end{bmatrix}$$

$$[K_G^c] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 \end{matrix} & \begin{matrix} 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 26\,880 & -20\,160 & -26\,880 & 20\,160 \\ -20\,160 & 15\,120 & 20\,160 & -15\,120 \\ -26\,880 & 20\,160 & 26\,880 & -20\,160 \\ 20\,160 & -15\,120 & -20\,160 & 15\,120 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Barra d - Nós 1 – 2

$$[K_G^d] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 35\,000 & 0 & -35\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -35\,000 & 0 & 35\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K_G^d] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 35\,000 & 0 & -35\,000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -35\,000 & 0 & 35\,000 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Barra e - Nós 3 – 4

$$[K_G^e] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 35\,000 & 0 & -35\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -35\,000 & 0 & 35\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K_G^e] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 5 & 6 \end{matrix} & \begin{matrix} 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 35\,000 & 0 & -35\,000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -35\,000 & 0 & 35\,000 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Barra f - Nós 2 – 3

$$[K_G^f] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 26\,250 & 0 & -26\,250 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -26\,250 & 0 & 26\,250 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K_G^f] = [K_L^f] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 26\,250 & 0 & -26\,250 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -26\,250 & 0 & 26\,250 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Barra g - Nós 4 – 5

$$[K_G^g] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 26\,250 & 0 & -26\,250 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -26\,250 & 0 & 26\,250 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

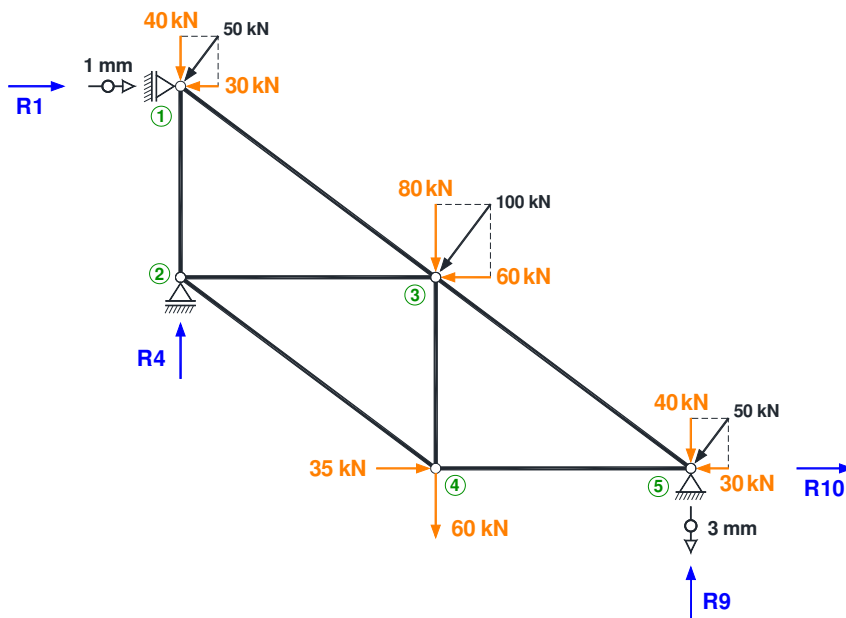
$$[K_G^g] = [K_L^{fg}] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 26\,250 & 0 & -26\,250 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -26\,250 & 0 & 26\,250 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

• **Matrizes de rigidez global da estrutura**

Contribuição de cada uma das barras na matriz de rigidez global da estrutura:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	a + d		d		a		0		0	
2										
3	d		c + d + f		f		c		0	
4										
5	a		f		a + b + e + f		e		b	
6										
7	0		c		e		c + e + g		g	
8										
9	0		0		b		g		b + e	
10										

K_G - Estrutura										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	26 880	-20 160	0	0	-26 880	20 160	0	0	0	0
2	-20 160	50 120	0	-35 000	20 160	-15 120	0	0	0	0
3	0	0	53 130	-20 160	-26 250	0	-26 880	20 160	0	0
4	0	-35 000	-20 160	50 120	0	0	20 160	-15 120	0	0
5	-26 880	20 160	-26 250	0	80 010	-40 320	0	0	-26 880	20 160
6	20 160	-15 120	0	0	-40 320	65 240	0	-35 000	20 160	-15 120
7	0	0	-26 880	20 160	0	0	53 130	-20 160	-26 250	0
8	0	0	20 160	-15 120	0	-35 000	-20 160	50 120	0	0
9	0	0	0	0	-26 880	20 160	-26 250	0	53 130	-20 160
10	0	0	0	0	20 160	-15 120	0	0	-20 160	15 120



• Vetor dos deslocamentos		• Vetor das forças exteriores		• Vetor das reações	
1	Δ_1	1	0,001	1	R1
2	Δ_2	2	Δ_2	2	0
3	Δ_3	3	Δ_3	3	0
4	Δ_4	4	0	4	R4
5	Δ_5	5	Δ_5	5	0
6	Δ_6	6	Δ_6	6	0
7	Δ_7	7	Δ_7	7	0
8	Δ_8	8	Δ_8	8	0
9	Δ_9	9	0	9	R9
10	Δ_{10}	10	-0,003	10	R10

$$[K_G] \times [\Delta_G] = [F_G] + [R_G]$$

K_G										x	Δ_G	=	F_G	+	R_G	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10						
1	26 880	-20 160	0	0	-26 880	20 160	0	0	0	0	1	0,001	1	- 30	1	R1
2	-20 160	50 120	0	-35 000	20 160	-15 120	0	0	0	0	2	Δ_2	2	- 40	2	0
3	0	0	53 130	-20 160	-26 250	0	-26 880	20 160	0	0	3	Δ_3	3	0	3	0
4	0	-35 000	-20 160	50 120	0	0	20 160	-15 120	0	0	4	0	4	0	4	R4
5	-26 880	20 160	-26 250	0	80 010	-40 320	0	0	-26 880	20 160	5	Δ_5	5	- 60	5	0
6	20 160	-15 120	0	0	-40 320	65 240	0	-35 000	20 160	-15 120	6	Δ_6	6	- 80	6	0
7	0	0	-26 880	20 160	0	0	53 130	-20 160	-26 250	0	7	Δ_7	7	35	7	0
8	0	0	20 160	-15 120	0	-35 000	-20 160	50 120	0	0	8	Δ_8	8	- 60	8	0
9	0	0	0	0	-26 880	20 160	-26 250	0	53 130	-20 160	9	0	9	- 30	9	R9
10	0	0	0	0	20 160	-15 120	0	0	-20 160	15 120	10	-0,003	10	- 40	10	R10

• Rearranjo do sistema de equações

Agrupamentos dos graus de liberdade correspondentes a nós livres e nós fixos

K_G										x	Δ_G	=	F_G	+	R_G	
	2	3	5	6	7	8	1	4	9	10						
2	K_{LL}						K_{LF}				2	Δ_{Li}	2	F_{Li}	2	$\bar{0}$
3											3		3		3	
5											5		5		5	
6											6		6		6	
7											7		7		7	
8											8		8		8	
1	K_{FL}						K_{FF}				1	Δ_F	1	F_F	1	R_F
4											4		4		4	
9											9		9		9	
10											10		10		10	

K_G										x	Δ_G	=	F_G	+	R_G	
	2	3	5	6	7	8	1	4	9	10						
2	50 120	0	20 160	-15 120	0	0	-20 160	-35 000	0	0	2	Δ_2	2	- 40	2	0
3	0	53 130	-26 250	0	-26 880	20 160	0	-20 160	0	0	3	Δ_3	3	0	3	0
5	20 160	-26 250	80 010	-40 320	0	0	-26 880	0	-26 880	20 160	5	Δ_5	5	- 60	5	0
6	-15 120	0	-40 320	65 240	0	-35 000	20 160	0	20 160	-15 120	6	Δ_6	6	- 80	6	0
7	0	-26 880	0	0	53 130	-20 160	0	20 160	-26 250	0	7	Δ_7	7	35	7	0
8	0	20 160	0	-35 000	-20 160	50 120	0	-15 120	0	0	8	Δ_8	8	- 60	8	0
1	-20 160	0	-26 880	20 160	0	0	26 880	0	0	0	1	0,001	1	- 30	1	R1
4	-35 000	-20 160	0	0	20 160	-15 120	0	50 120	0	0	4	0	4	0	4	R4
9	0	0	-26 880	20 160	-26 250	0	0	0	53 130	-20 160	9	0	9	- 30	9	R9
10	0	0	20 160	-15 120	0	0	0	0	-20 160	15 120	10	-0,003	10	- 40	10	R10

- Determinação dos deslocamentos dos nós livres: $[\Delta_{Li}]$

$$[K_{LL}] \times [\Delta_{Li}] + [K_{LF}] \times [\Delta_F] = [F_{Li}]$$

K_{LL}						x	Δ_{Li}	+	K_{LF}				x	Δ_F	=	F_{Li}
50 120	0	20 160	-15 120	0	0		Δ_2		-20 160	-35 000	0	0		0,001		-40
0	53 130	-26 250	0	-26 880	20 160		Δ_3		0	-20 160	0	0		0		0
20 160	-26 250	80 010	-40 320	0	0		Δ_5		-26 880	0	-26 880	20 160		0		-60
-15 120	0	-40 320	65 240	0	-35 000		Δ_6		20 160	0	20 160	-15 120		-0,003		-80
0	-26 880	0	0	53 130	-20 160		Δ_7		0	20 160	-26 250	0				35
0	20 160	0	-35 000	-20 160	50 120		Δ_8		0	-15 120	0	0				-60

$$[K_{LL}] \times [\Delta_{Li}] = [F_{Li}] - [K_{LF}] \times [\Delta_F]$$

K_{LL}						x	Δ_{Li}	=	$F_{Li} - K_{LF} \times \Delta_F$
50 120	0	20 160	-15 120	0	0		Δ_2		-19,84
0	53 130	-26 250	0	-26 880	20 160		Δ_3		0,00
20 160	-26 250	80 010	-40 320	0	0		Δ_5		27,36
-15 120	0	-40 320	65 240	0	-35 000		Δ_6		-145,52
0	-26 880	0	0	53 130	-20 160		Δ_7		35,00
0	20 160	0	-35 000	-20 160	50 120		Δ_8		-60,00

Resolvendo o sistema de equações: $[\Delta_{Li}] \Rightarrow$

$$\begin{cases} \Delta_2 = -1,79 \times 10^{-3} \text{ m} = -1,79 \text{ mm} \downarrow \\ \Delta_3 = -2,38 \times 10^{-4} \text{ m} = -0,238 \text{ mm} \leftarrow \\ \Delta_5 = -4,94 \times 10^{-3} \text{ m} = -4,94 \text{ mm} \leftarrow \\ \Delta_6 = -1,12 \times 10^{-2} \text{ m} = -11,2 \text{ mm} \downarrow \\ \Delta_7 = -3,37 \times 10^{-3} \text{ m} = -3,37 \text{ mm} \leftarrow \\ \Delta_8 = -1,03 \times 10^{-2} \text{ m} = -10,3 \text{ mm} \downarrow \end{cases}$$

Vetor dos deslocamentos: $[\Delta] =$

Δ_1	$1,00 \times 10^{-3}$
Δ_2	$-1,79 \times 10^{-3}$
Δ_3	$-2,38 \times 10^{-4}$
Δ_4	0
Δ_5	$-4,94 \times 10^{-3}$
Δ_6	$-1,12 \times 10^{-2}$
Δ_7	$-3,37 \times 10^{-3}$
Δ_8	$-1,03 \times 10^{-2}$
Δ_9	0
Δ_{10}	$-3,00 \times 10^{-3}$

=

unidades: **metros**

Alínea b)

- **Determinação das reações:** $[R_F]$

$$[K_{FL}] \times [\Delta_{Li}] + [K_{FF}] \times [\Delta_F] = [F_F] + [R_F]$$

K_{FL}						x	Δ_{Li}	+	K_{LF}				x	Δ_F	=	F_{Li}	+	R_F
-20 160	0	-26 880	20 160	0	0		Δ_2		26 880	0	0	0		0,001		- 30		R1
-35 000	-20 160	0	0	20 160	-15 120		Δ_3		0	50 120	0	0		0		0		R4
0	0	-26 880	20 160	-26 250	0		Δ_5		0	0	53 130	-20 160		0		- 30		R9
0	0	20 160	-15 120	0	0		Δ_6		0	0	-20 160	15 120		-0,003		- 40		R10
							Δ_7											
							Δ_8											

$$[K_{FL}] \times [\Delta_{Li}] + [K_{FF}] \times [\Delta_F] - [F_F] = [R_F]$$

K_{FL}						x	Δ_{Li}	+	$K_{FF} \times \Delta_F - F_F$		=	R_F
-20 160	0	-26 880	20 160	0	0		$-1,79 \times 10^{-3}$		56,88		R1	
-35 000	-20 160	0	0	20 160	-15 120		$-2,38 \times 10^{-4}$		0,00		R4	
0	0	-26 880	20 160	-26 250	0		$-4,94 \times 10^{-3}$		90,48		R9	
0	0	20 160	-15 120	0	0		$-1,12 \times 10^{-2}$		-5,36		R10	
							$-3,37 \times 10^{-3}$					
							$-1,03 \times 10^{-2}$					

Reações:

$$\begin{cases} R1 = -0,384 \text{ kN} \leftarrow \\ R4 = 155,288 \text{ kN} \uparrow \\ R9 = 85,384 \text{ kN} \rightarrow \\ R10 = 64,712 \text{ kN} \uparrow \end{cases}$$

Vetor das reações: $[R_F] = \begin{bmatrix} R1 \\ R4 \\ R9 \\ R10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,384 \\ 155,288 \\ 85,384 \\ 64,712 \end{bmatrix}$ unidades: **kN**

Alínea c)

• **Determinação dos esforços nas barras**

$$[F_L] = [K_L] \times [\Delta_L] = [K_L] \times [T] \times [\Delta_G]$$

Barra a - Nós 1 – 3 $\Rightarrow$ Deslocamentos (referencial geral): $\Delta_1, \Delta_2 - \Delta_5, \Delta_6$

$$[F_L^a] = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42\,000 & 0 & -42\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -42\,000 & 0 & 42\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,8 & -0,6 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & -0,6 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0,8 \end{bmatrix} \times \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1,00 \times 10^{-3} \\ -1,79 \times 10^{-3} \\ -4,94 \times 10^{-3} \\ -1,12 \times 10^{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -37,980 \\ 0 \\ 37,980 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Na **barra a** está a atuar um esforço de tração de **37,98 kN**.

Barra b - Nós 3 – 5 $\Rightarrow$ Deslocamentos (referencial geral): $\Delta_5, \Delta_6 - \Delta_9, \Delta_{10}$

$$[F_L^b] = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42\,000 & 0 & -42\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -42\,000 & 0 & 42\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,8 & -0,6 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & -0,6 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0,8 \end{bmatrix} \times \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \begin{bmatrix} -4,94 \times 10^{-3} \\ -1,12 \times 10^{-2} \\ 0 \\ -3,00 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41,187 \\ 0 \\ -41,187 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Na **barra b** está a atuar um esforço de compressão de **41,19 kN**.

Barra c - Nós 2 – 4 $\Rightarrow$ Deslocamentos (referencial geral): $\Delta_3, \Delta_4 - \Delta_7, \Delta_8$

$$[F_L^c] = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42\,000 & 0 & -42\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -42\,000 & 0 & 42\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,8 & -0,6 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & -0,6 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0,8 \end{bmatrix} \times \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \begin{bmatrix} -2,38 \times 10^{-4} \\ 0 \\ -3,37 \times 10^{-3} \\ -1,03 \times 10^{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -154,167 \\ 0 \\ 154,167 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Na **barra c** está a atuar um esforço de tração de **154,17 kN**.

Barra d - Nós 1 – 2 $\Rightarrow$ Deslocamentos (referencial geral): $\Delta_1, \Delta_2 - \Delta_3, \Delta_4$

$$[F_L^d] = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35\,000 & 0 & -35\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -35\,000 & 0 & 35\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1,00 \times 10^{-3} \\ -1,79 \times 10^{-3} \\ -2,38 \times 10^{-4} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 62,788 \\ 0 \\ -62,788 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Na **barra d** está a atuar um esforço de compressão de **62,79 kN**.

Barra e - Nós 3 – 4 $\Rightarrow$ Deslocamentos (referencial geral): $\Delta 5, \Delta 6 - \Delta 7, \Delta 8$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35\,000 & 0 & -35\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -35\,000 & 0 & 35\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & -4,94 \times 10^{-3} \\ 6 & -1,12 \times 10^{-2} \\ 7 & -3,37 \times 10^{-3} \\ 8 & -1,03 \times 10^{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32,500 \\ 0 \\ -32,500 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Na **barra e** está a atuar um esforço de compressão de **32,50 kN**.

Barra f - Nós 2 – 3 $\Rightarrow$ Deslocamentos (referencial geral): $\Delta 3, \Delta 4 - \Delta 5, \Delta 6$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26\,250 & 0 & -26\,250 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -26\,250 & 0 & 26\,250 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -2,38 \times 10^{-4} \\ 4 & 0 \\ 5 & -4,94 \times 10^{-3} \\ 6 & -1,12 \times 10^{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 123,333 \\ 0 \\ -123,333 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Na **barra f** está a atuar um esforço de compressão de **123,33 kN**.

Barra g - Nós 4 – 5 $\Rightarrow$ Deslocamentos (referencial geral): $\Delta 7, \Delta 8 - \Delta 9, \Delta 10$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26\,250 & 0 & -26\,250 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -26\,250 & 0 & 26\,250 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & -3,37 \times 10^{-3} \\ 8 & -1,03 \times 10^{-2} \\ 9 & 0 \\ 10 & -3,00 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -88,333 \\ 0 \\ 88,333 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Na **barra g** está a atuar um esforço de tração de **83,33 kN**.