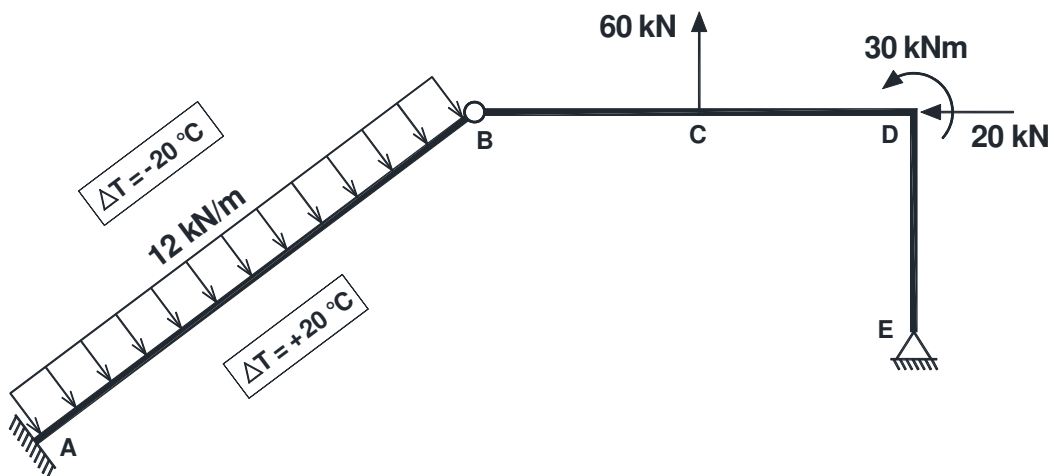


LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

TEORIA DE ESTRUTURAS

MÉTODO DAS FORÇAS

EXAME – 13 / SETEMBRO / 2011



ESTRUTURA CONTÍNUA HIPERESTÁTICA

ISABEL ALVIM TELES

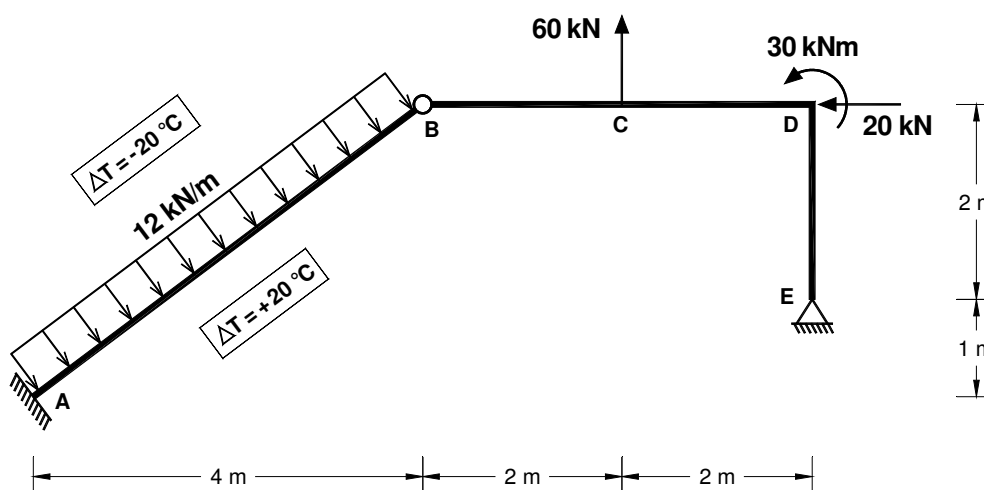
EXERCÍCIO

Considere a estrutura representada na figura abaixo, constituída por dois corpos unidos por uma rótula em **B**.

Para além das cargas indicadas na figura, a barra **AB** está submetida à seguinte variação diferencial de temperatura: $\Delta T = -20\text{ }^\circ\text{C}$ na face superior e $\Delta T = +20\text{ }^\circ\text{C}$ na face inferior (ver figura).

Todas as barras da estrutura têm secção rectangular (ver características na tabela abaixo) e estão realizadas com um material que apresenta as seguintes propriedades: $E = 40\text{ GPa}$; $\alpha = 1,5 \times 10^{-5}\text{ }^\circ\text{C}^{-1}$

Na resolução deste exercício recorra ao Método das Forças desprezando a deformabilidade por esforço transversal e esforço axial.



Características das secções transversais das barras	
Barra AB	Restantes barras
largura = 0,20 m	A = 0,03 m ² (área)
altura = 0,30 m	I = 5,625 × 10 ⁻⁵ m ⁴ (inércia)

- a) Identifique, justificando convenientemente, o grau de hiperestaticidade da estrutura.
- b) Determine as reações nos apoios, indicando claramente as suas direções e sentidos.
- c) Aplicando o Teorema dos Trabalhos Virtuais (TTV), trace o diagrama de momentos na barra **BCD**.

RESOLUÇÃO

Alínea a)

A estrutura é constituída por dois corpos **[AB]** e **[BCDE]**, unidos por uma rótula em **B**.

Podem ser escritas 4 equações de equilíbrio:

- 3 equações fundamentais da estática para toda a estrutura;
- 1 equação de momentos na rótula de um dos corpos.

A estruturas tem 5 ligações ao exterior: 3 reações no encastramento **A** e 2 reações no apoio duplo **E**.

Temos então 5 incógnitas e 4 equações, pelo que a estrutura é **hiperestática de grau 1**.

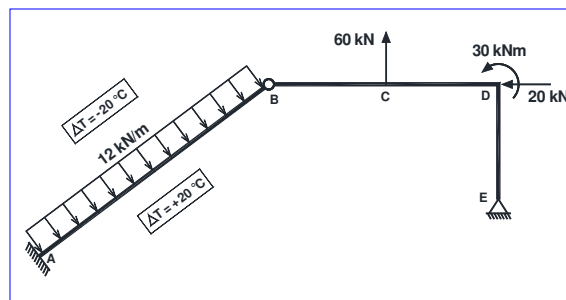
Alínea b)

Vamos adoptar para sistema base (S_0) a estrutura isostática que se obtém substituindo o encastramento em A por um apoio duplo. A estrutura do exercício (S) vai ser decomposta no sistema S_0 e no sistema S_1 .

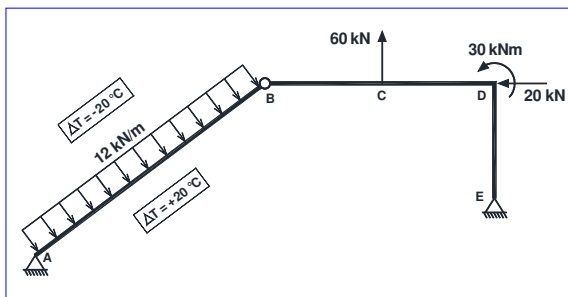
$$S = S_0 + X_1 \times S_1$$

X_1 – incógnita hiperestática, correspondente ao momento de encastramento no apoio A.

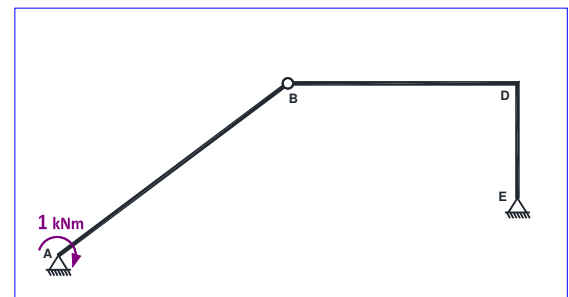
S



S₀

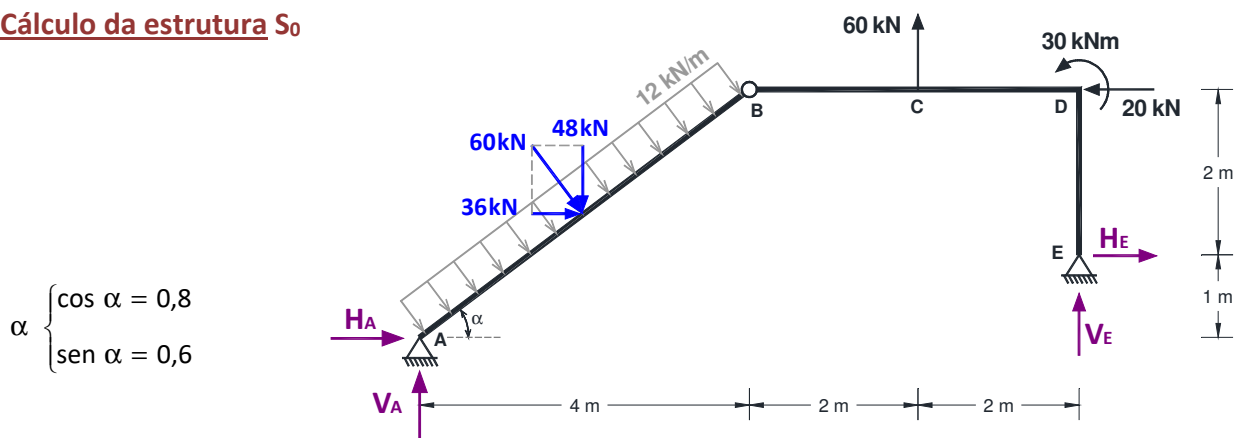


S₁



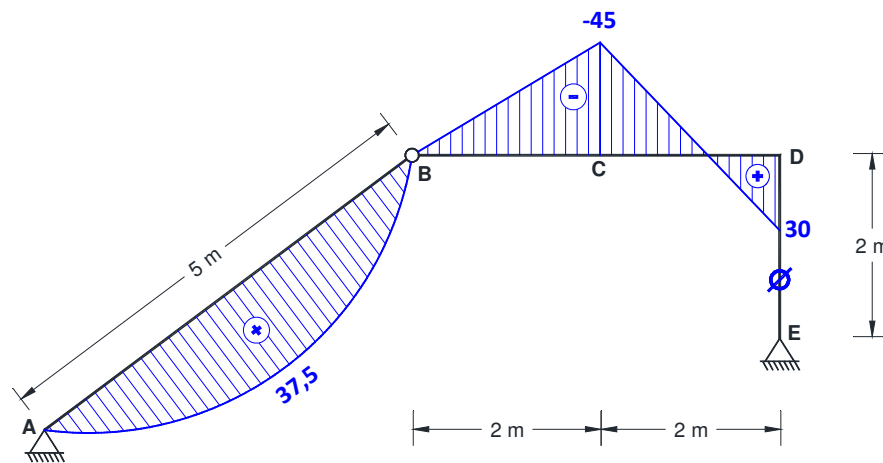
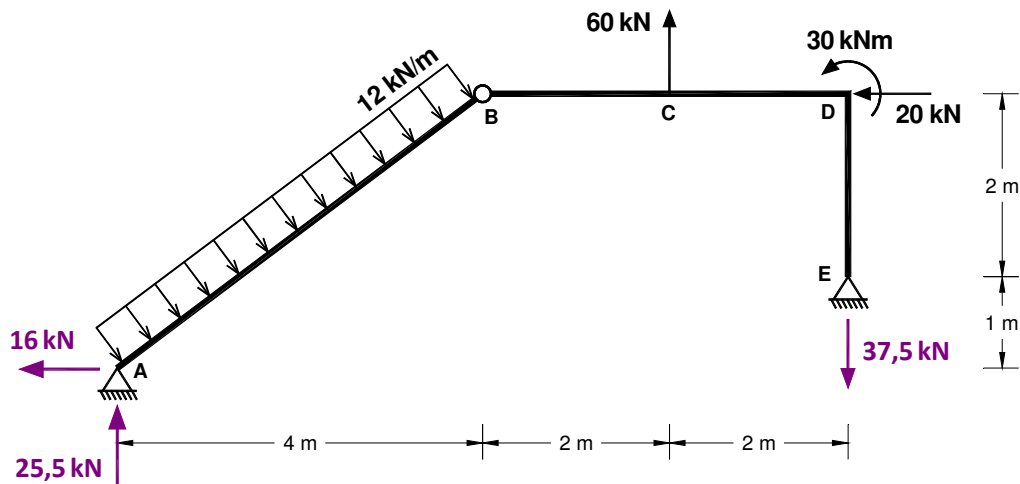
+ $X_1 \times$

• **Cálculo da estrutura S₀**



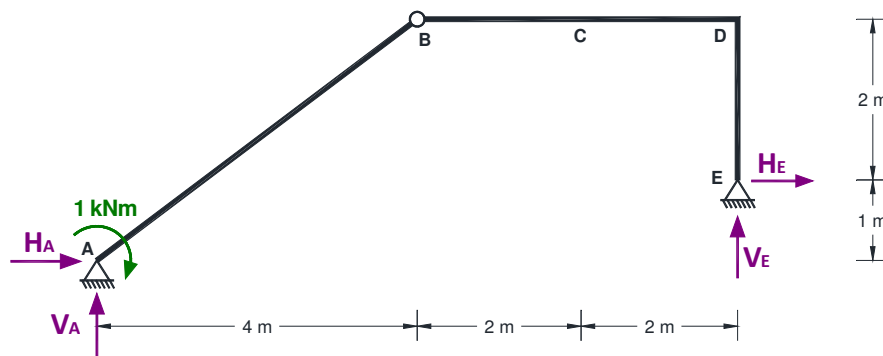
$$\alpha \begin{cases} \cos \alpha = 0,8 \\ \sin \alpha = 0,6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_A = 0 \\ \sum M_B^{esq} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A + H_E + 36 - 20 = 0 \\ V_A + V_E + 60 - 48 = 0 \\ -60 \times 2,5 + 60 \times 6 + 30 + 20 \times 3 + V_E \times 8 - H_E \times 1 = 0 \\ 60 \times 2 + 30 + V_E \times 4 + H_E \times 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = -16 \text{ kN} \leftarrow \\ V_A = 25,5 \text{ kN} \uparrow \\ H_E = 0 \\ V_E = -37,5 \text{ kN} \downarrow \end{cases}$$

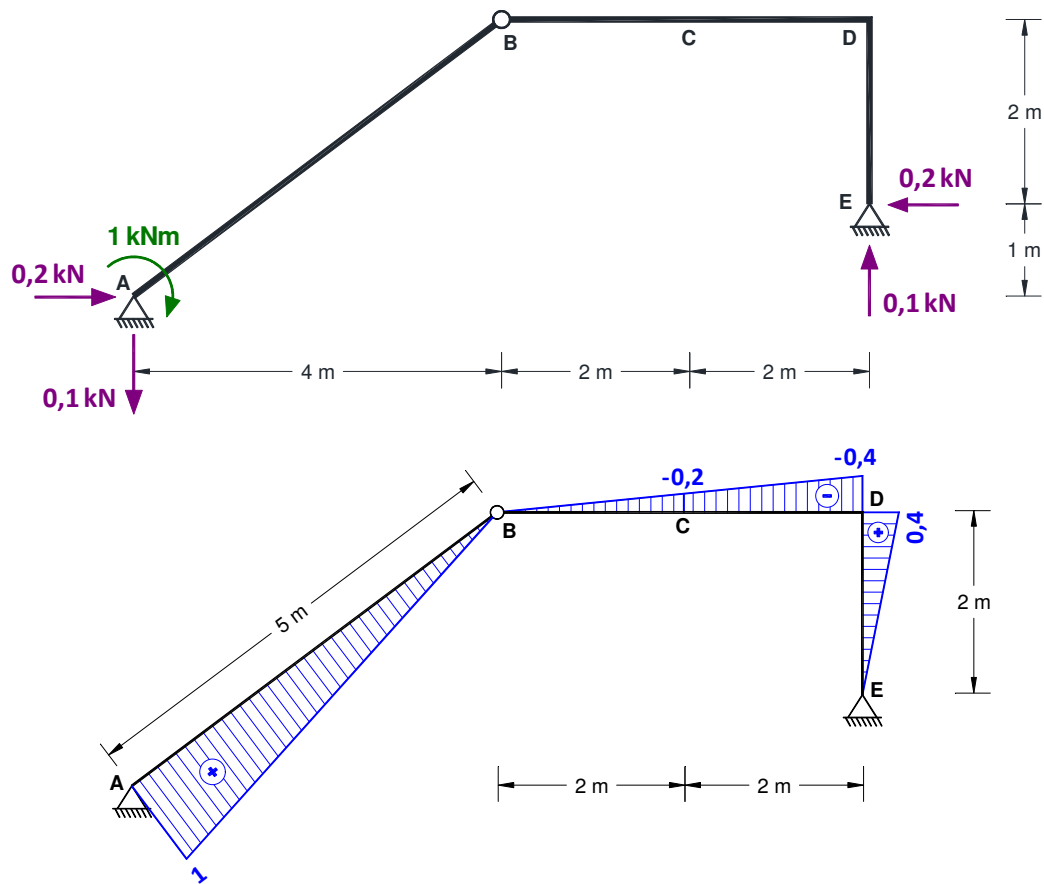


Sistema base S_0 - Diagrama de momentos flectores (kNm)

• Cálculo da estrutura S_1



$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_A = 0 \\ \sum M_B^{esq} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A + H_E = 0 \\ V_A + V_E = 0 \\ V_E \times 8 - H_E \times 1 = 1 \\ V_E \times 4 + H_E \times 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = 0,2 \text{ kN} \rightarrow \\ V_A = -0,1 \text{ kN} \downarrow \\ H_E = -0,2 \text{ kN} \leftarrow \\ V_E = 0,1 \text{ kN} \uparrow \end{cases}$$



Sistema S_1 - Diagrama de momentos flectores (kNm)

• **Determinação da incógnita hiperestática**

MÉTODO DAS FORÇAS

(desprezando a deformabilidade por esforço transversal e esforço axial)

$$\sum F_{\text{ext}}^{S_1} \times \Delta_R = \int \frac{M_1 \times M_0}{EI} dz + \int M_1 \cdot \alpha \frac{T_{\text{inf}} - T_{\text{sup}}}{h} dz + \left(\int \frac{M_1 \times M_1}{EI} dz \right) \cdot X_1$$

Ou seja:

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \quad \text{sendo:} \quad \begin{cases} \delta_{10} = \int \frac{M_1 \times M_0}{EI} dz + \int M_1 \cdot \alpha \frac{T_{\text{inf}} - T_{\text{sup}}}{h} dz - \sum F_{\text{ext}}^{S_1} \times \Delta_R \\ \delta_{11} = \int \frac{M_1 \times M_1}{EI} dz \end{cases}$$

Barra AB	$EI = 40 \times 10^6 \times \frac{0,20 \times 0,30^3}{12} = 18\,000 \text{ kPa} \times \text{m}^4$
Restantes barras	$EI = 40 \times 10^6 \times 5,625 \times 10^{-5} = 2\,250 \text{ kPa} \times \text{m}^4$

$$\int \frac{M_1 \times M_0}{EI} dz = \frac{1}{18000} \left(\frac{1}{3} \times 37,5 \times 1 \times 5 \right) + \frac{1}{2250} \left[\frac{-45 \times (-0,2) \times 2}{3} + \frac{2}{6} (2 \times 45 \times 0,2 + 2 \times 30 \times (-0,4) + 45 \times 0,4 + 30 \times (-0,2)) \right] = \frac{62,5}{18000} + \frac{8}{2250} = 7,0278 \times 10^{-3}$$

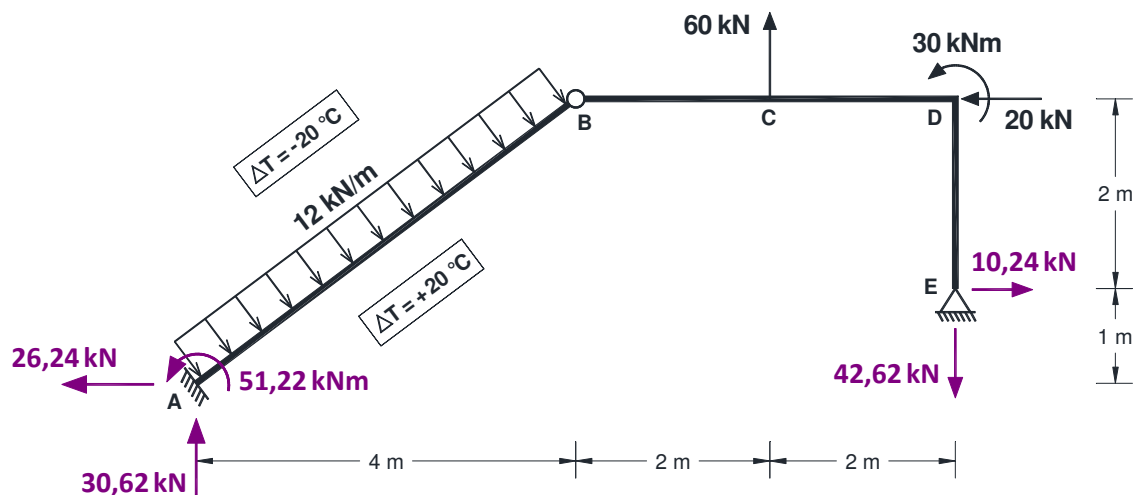
$$\int M_1 \cdot \alpha \frac{T_{inf} - T_{sup}}{h} dz = 1,5 \times 10^{-5} \times \frac{20 - (-20)}{0,30} \int M_1 dz = 200 \times 10^{-5} \times \frac{5 \times 1}{2} = 500 \times 10^{-5} = 0,005$$

$$\delta_{10} = \int \frac{M_1 \times M_0}{EI} dz + \int M_1 \cdot \alpha \frac{T_{inf} - T_{sup}}{h} dz - \sum F_{ext}^{S_1} \times \Delta_R = 7,0278 \times 10^{-3} + 0,005 - 0 = 1,2028 \times 10^{-2}$$

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1 \times M_1}{EI} dz = \frac{1}{18000} \times \frac{1 \times 1 \times 5}{3} + \frac{1}{2250} \left(\frac{0,4 \times 0,4 \times 4}{3} + \frac{0,4 \times 0,4 \times 2}{3} \right) = 2,34815 \times 10^{-4}$$

$$\begin{aligned} \delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 &= 0 \Rightarrow 1,2028 \times 10^{-2} + 2,34815 \times 10^{-4} \cdot X_1 = 0 \\ &\Rightarrow X_1 = -51,22 \\ &\Rightarrow M_A = 51,22 \text{ kNm} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} H_A = (H_A)^{S_0} + X_1 \cdot (H_A)^{S_1} \\ V_A = (V_A)^{S_0} + X_1 \cdot (V_A)^{S_1} \\ M_A = 51,22 \text{ kNm} \\ H_E = (H_E)^{S_0} + X_1 \cdot (H_E)^{S_1} \\ V_E = (V_E)^{S_0} + X_1 \cdot (V_E)^{S_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = -16 + (-51,22) \times 0,2 \\ V_A = 25,5 + (-51,22) \times (-0,1) \\ M_A = 51,22 \text{ kNm} \\ H_E = 0 + (-51,22) \times (-0,2) \\ V_E = -37,5 + (-51,22) \times 0,1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = -26,24 \text{ kN} \leftarrow \\ V_A = 30,62 \text{ kN} \uparrow \\ M_A = 51,22 \text{ kNm} \curvearrowright \\ H_E = 10,24 \text{ kN} \rightarrow \\ V_E = -42,62 \text{ kN} \downarrow \end{cases}$$



Alínea c)

O diagrama de momentos na barra **BCD** é constituído por rectas, pelo que só é necessário determinar os momentos flectores nos pontos **B**, **C** e **D**.

$$\begin{cases} M_B = (M_B)^{S_0} + \mathbf{x}_1 \cdot (M_B)^{S_1} \\ M_C = (M_C)^{S_0} + \mathbf{x}_1 \cdot (M_C)^{S_1} \\ M_D = (M_D)^{S_0} + \mathbf{x}_1 \cdot (M_D)^{S_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_B = 0 + (-51,22) \times 0 = 0 \\ M_C = -45 + (-51,22) \times (-0,2) = -34,56 \text{ kNm} \\ M_D = 30 + (-51,22) \times (-0,4) = 50,49 \text{ kNm} \end{cases}$$

