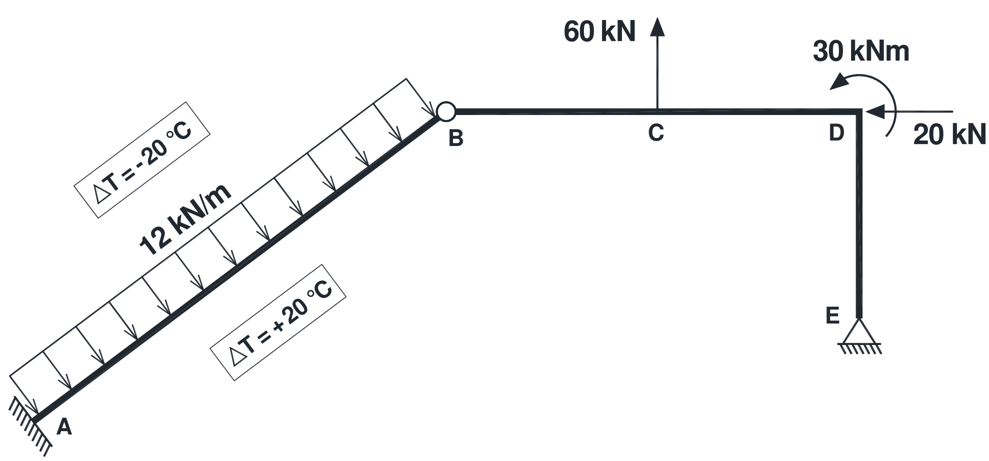
LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

TEORIA DE ESTRUTURAS

MÉTODO DAS FORÇAS

EXAME – 13 / SETEMBRO / 2011



ESTRUTURA CONTÍNUA HIPERESTÁTICA

ISABEL ALVIM TELES

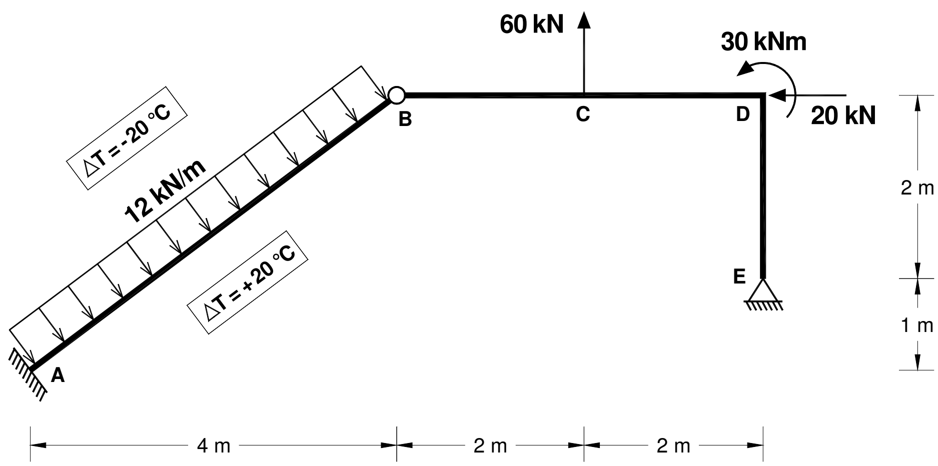
EXERCÍCIO

Considere a estrutura representada na figura abaixo, constituída por dois corpos unidos por uma rótula em **B**.

Para além das cargas indicadas na figura, a barra **AB** está submetida à seguinte variação diferencial de temperatura: ΔT= -20 °C na face superior e ΔT= +20 °C na face inferior (ver figura).

Todas as barras da estrutura têm secção rectangular (ver características na tabela abaixo) e estão realizadas com um material que apresenta as seguintes propriedades: **E** = 40 GPa; **α** = 1,5x10-5 /°C

Na resolução deste exercício recorra ao Método das Forças desprezando a deformabilidade por esforço transverso e esforço axial.



Características das secções transversais das barras	
Barra AB	**Restantes barras**
largura = 0,20 m	A = 0,03 m^2 (área)
altura = 0,30 m	I =5,625x10^{-5} m^4 (inércia)

a) Identifique, justificando convenientemente, o grau de hiperestaticidade da estrutura.

b) Determine as reações nos apoios, indicando claramente as suas direções e sentidos.

c) Aplicando o Teorema dos Trabalhos Virtuais (TTV), trace o diagrama de momentos na barra **BCD**.

RESOLUÇÃO

Alínea a)

A estrutura é constituída por dois corpos **[AB]** e **[BCDE]**, unidos por uma rótula em **B**.

Podem ser escritas 4 equações de equilíbrio:
- 3 equações fundamentais da estática para toda a estrutura;
- 1 equação de momentos na rótula de um dos corpos.

A estruturas tem 5 ligações ao exterior: 3 reações no encastramento **A** e 2 reações no apoio duplo **E.**

Temos então 5 incógnitas e 4 equações, pelo que a estrutura é **hiperestática de grau 1**.

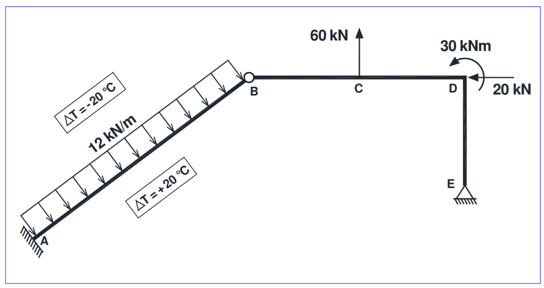
Alínea b)

Vamos adoptar para sistema base (**S_0**) a estrutura isostática que se obtém substituindo o encastramento em **A** por um apoio duplo. A estrutura do exercício (**S**) vai ser decomposta no sistema **S_0** e no sistema **S_1**.

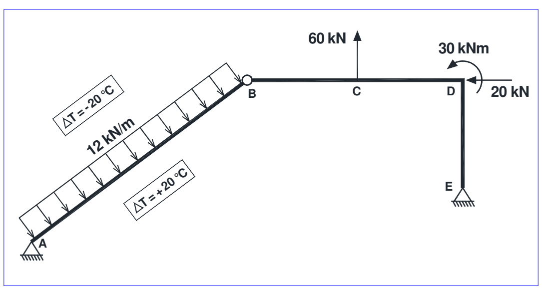
$$\boxed{S = S_0 + X_1 \times S_1}$$

X_1 – incógnita hiperestática, correspondente ao momento de encastramento no apoio **A**.

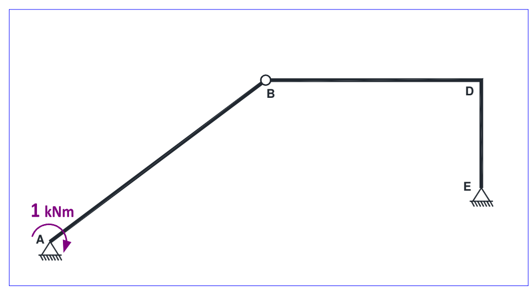
S



S0 **S1**

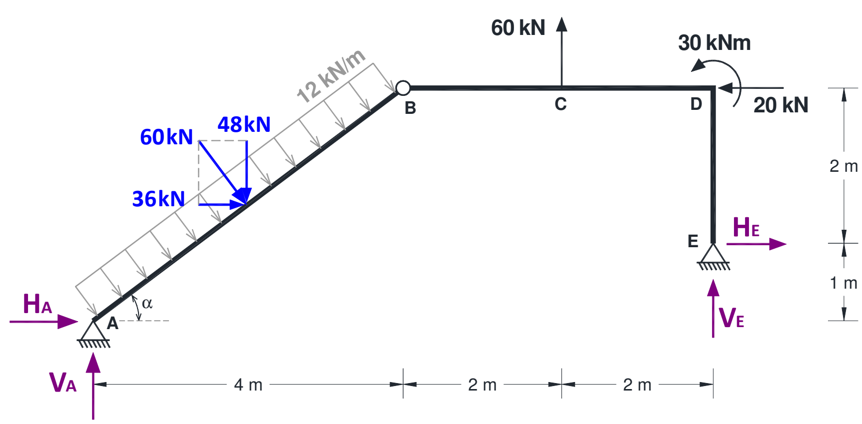


$+ \; X_1 \; \times$

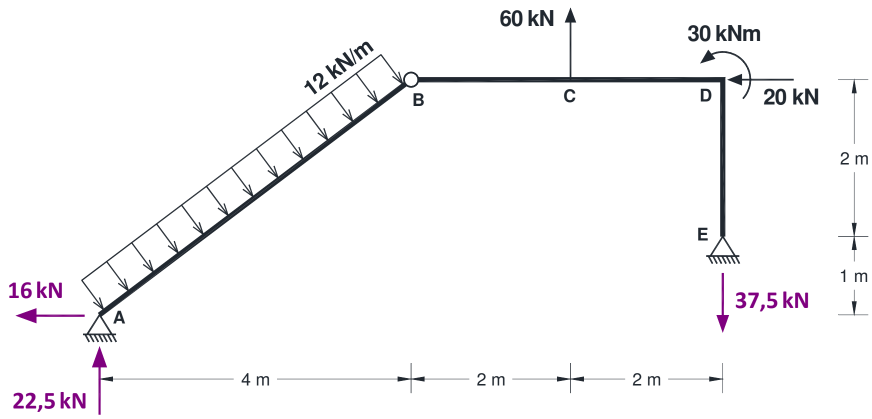


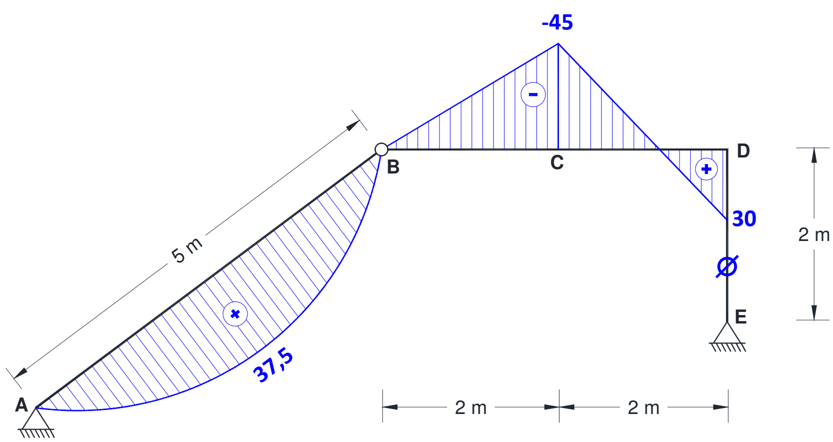
- **Cálculo da estrutura S_0**

$$\alpha \begin{cases} \cos\alpha = 0{,}8 \\ \operatorname{sen}\alpha = 0{,}6 \end{cases}$$



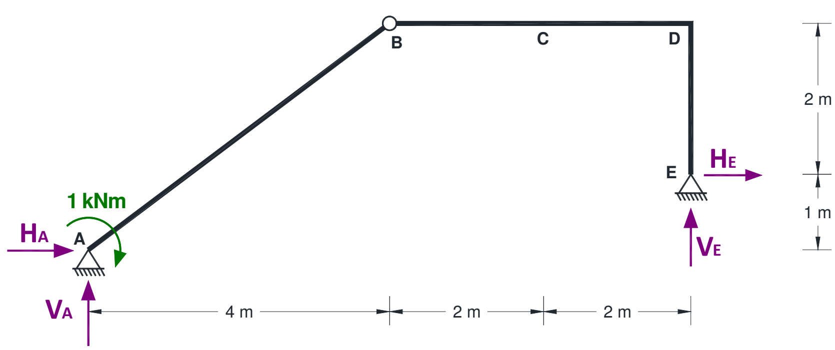
$$\begin{cases} \sum Fx=0 \\ \sum Fy=0 \\ \sum M_A=0 \\ \sum M_B^{esq}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A + H_E + 36 - 20 = 0 \\ V_A + V_E + 60 - 48 = 0 \\ -60\times 2{,}5 + 60\times 6 + 30 + 20\times 3 + V_E\times 8 - H_E\times 1 = 0 \\ 60\times 2 + 30 + V_E\times 4 + H_E\times 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = -16\text{ kN} \leftarrow \\ V_A = 25{,}5\text{ kN} \uparrow \\ H_E = 0 \\ V_E = -37{,}5\text{ kN} \downarrow \end{cases}$$



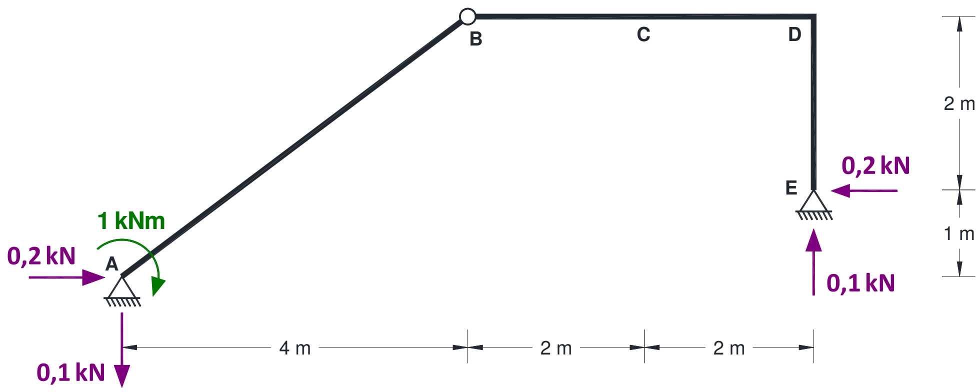


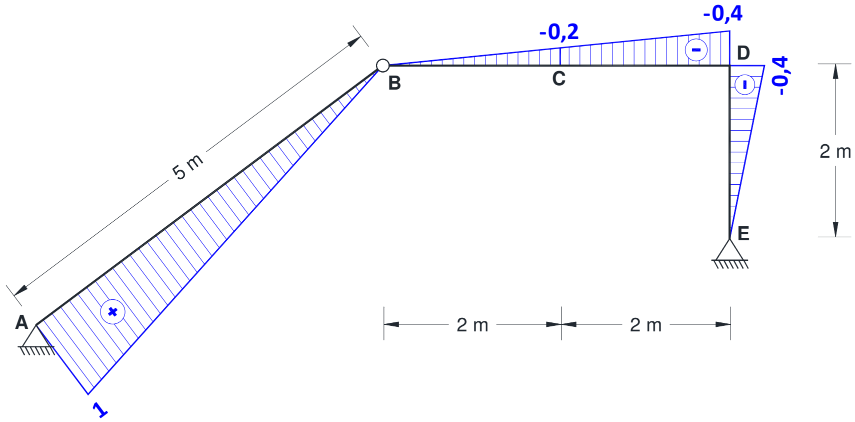
Sistema base S_0 - Diagrama de momentos flectores (kNm)

- **Cálculo da estrutura S_1**



$$\begin{cases} \sum Fx=0 \\ \sum Fy=0 \\ \sum M_A=0 \\ \sum M_B^{esq}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A + H_E = 0 \\ V_A + V_E = 0 \\ V_E \times 8 - H_E \times 1 = 1 \\ V_E \times 4 + H_E \times 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = 0{,}2 \text{ kN } \rightarrow \\ V_A = -0{,}1 \text{ kN } \downarrow \\ H_E = -0{,}2 \text{ kN } \leftarrow \\ V_E = 0{,}1 \text{ kN } \uparrow \end{cases}$$





Sistema S_1 - Diagrama de momentos flectores (kNm)

• Determinação da incógnita hiperestática

MÉTODO DAS FORÇAS

(desprezando a deformabilidade por esforço transverso e esforço axial)

$$\Sigma F_{ext}^{S_1} \times \Delta_R = \int \frac{M_1 \times M_0}{EI} dz + \int M_1 . \alpha \frac{T_{inf} - T_{sup}}{h} dz + \left(\int \frac{M_1 \times M_1}{EI} dz \right) . \mathbf{X_1}$$

Ou seja:

$$\boxed{\delta_{10} + \delta_{11} . \mathbf{X_1} = 0}$$

sendo:

$$\delta_{10} = \int \frac{M_1 \times M_0}{EI} dz + \int M_1 . \alpha \frac{T_{inf} - T_{sup}}{h} dz - \Sigma F_{ext}^{S_1} \times \Delta_R$$

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1 \times M_1}{EI} dz$$

Barra AB	$EI = 40 \times 10^6 \times \frac{0{,}20 \times 0{,}30^3}{12} = 18\,000 \text{ kPa} \times \text{m}^4$
Restantes barras	$EI = 40 \times 10^6 \times 5{,}625 \times 10^{-5} = 2\,250 \text{ kPa} \times \text{m}^4$

$$\int \frac{M_1 \times M_0}{EI} dz = \frac{1}{18\,000}\left(\frac{1}{3}\times 37{,}5\times 1\times 5\right)+$$

$$+\frac{1}{2250}\left[\frac{-45\times(-0{,}2)\times 2}{3}+\frac{2}{6}\left(2\times 45\times 0{,}2+2\times 30\times(-0{,}4)+45\times 0{,}4+30\times(-0{,}2)\right)\right]=$$

$$=\frac{62{,}5}{18\,000}+\frac{8}{2250} = 7{,}0278\times 10^{-3}$$

$$\int M_1 \,.\, \alpha \frac{T_{inf}-T_{sup}}{h} dz = 1{,}5\times 10^{-5}\times\frac{20-(-20)}{0{,}30}\int M_1\, dz = 200\times 10^{-5}\times\frac{5\times 1}{2} = 500\times 10^{-5} = 0{,}005$$

$$\delta_{10} = \int \frac{M_1\times M_0}{EI}dz + \int M_1 \,.\, \alpha\frac{T_{inf}-T_{sup}}{h}dz - \Sigma F_{ext}^{S_1}\times\Delta_R = 7{,}0278\times 10^{-3}+0{,}005-0 = 1{,}2028\times 10^{-2}$$

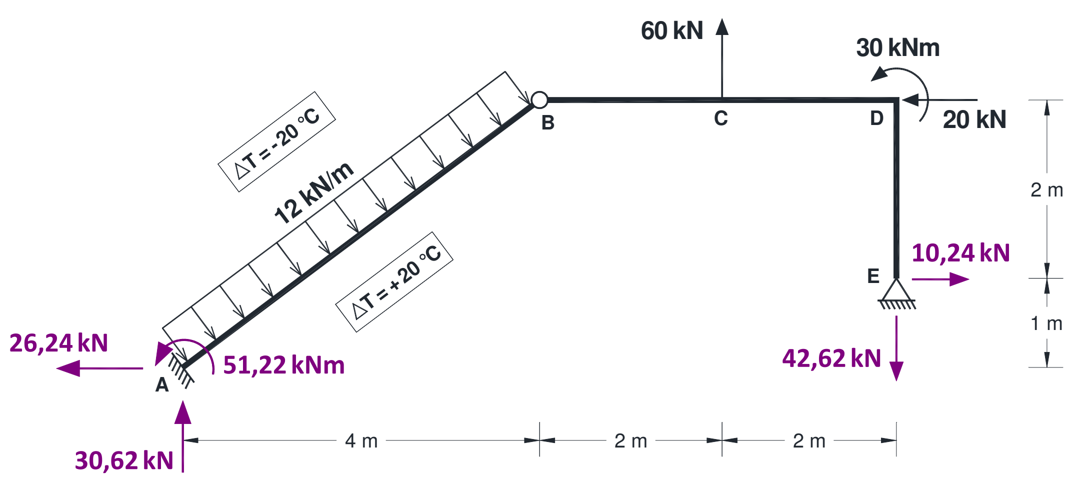
$$\delta_{11} = \int\frac{M_1\times M_1}{EI}dz = \frac{1}{18\,000}\times\frac{1\times 1\times 5}{3}+\frac{1}{2\,250}\left(\frac{0{,}4\times 0{,}4\times 4}{3}+\frac{0{,}4\times 0{,}4\times 2}{3}\right) = 2{,}34815\times 10^{-4}$$

$$\delta_{10}+\delta_{11}.\mathbf{X_1} = 0 \quad\Rightarrow\quad 1{,}2028\times 10^{-2}+2{,}34815\times 10^{-4}.\mathbf{X_1} = 0$$

$$\Rightarrow\quad \mathbf{X_1} = -51{,}22$$

$$\Rightarrow\quad \mathbf{M_A} = 51{,}22 \text{ kNm} \;\circlearrowleft$$

$$\begin{cases} H_A = (H_A)^{S_0} + \mathbf{X_1}.(H_A)^{S_1} \\ V_A = (V_A)^{S_0} + \mathbf{X_1}.(V_A)^{S_1} \\ M_A = 51{,}22 \text{ kNm} \\ H_E = (H_E)^{S_0} + \mathbf{X_1}.(H_E)^{S_1} \\ V_E = (V_E)^{S_0} + \mathbf{X_1}.(V_E)^{S_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = -16 + (-51{,}22)\times 0{,}2 \\ V_A = 25{,}5 + (-51{,}22)\times(-0{,}1) \\ M_A = 51{,}22 \text{ kNm} \\ H_E = 0 + (-51{,}22)\times(-0{,}2) \\ V_E = -37{,}5 + (-51{,}22)\times 0{,}1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = -26{,}24 \text{ kN} \;\leftarrow \\ V_A = 30{,}62 \text{ kN} \;\uparrow \\ M_A = 51{,}22 \text{ kNm} \;\circlearrowleft \\ H_E = 10{,}24 \text{ kN} \;\rightarrow \\ V_E = -42{,}62 \text{ kN} \;\downarrow \end{cases}$$



Alínea c)

O diagrama de momentos na barra **BCD** é constituído por rectas, pelo que só é necessário determinar os momentos flectores nos pontos **B**, **C** e **D**.

$$\left|\begin{array}{l} M_B = (M_B)^{S_0} + \mathbf{X_1}.(M_B)^{S_1} \\ M_C = (M_C)^{S_0} + \mathbf{X_1}.(M_C)^{S_1} \\ M_D = (M_D)^{S_0} + \mathbf{X_1}.(M_D)^{S_1} \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} M_B = 0 + (-51{,}22)\times 0 = 0 \\ M_C = -45 + (-51{,}22)\times(-0{,}2) = -34{,}56 \text{ kNm} \\ M_D = 30 + (-51{,}22)\times(-0{,}4) = 50{,}49 \text{ kNm} \end{array}\right.$$