

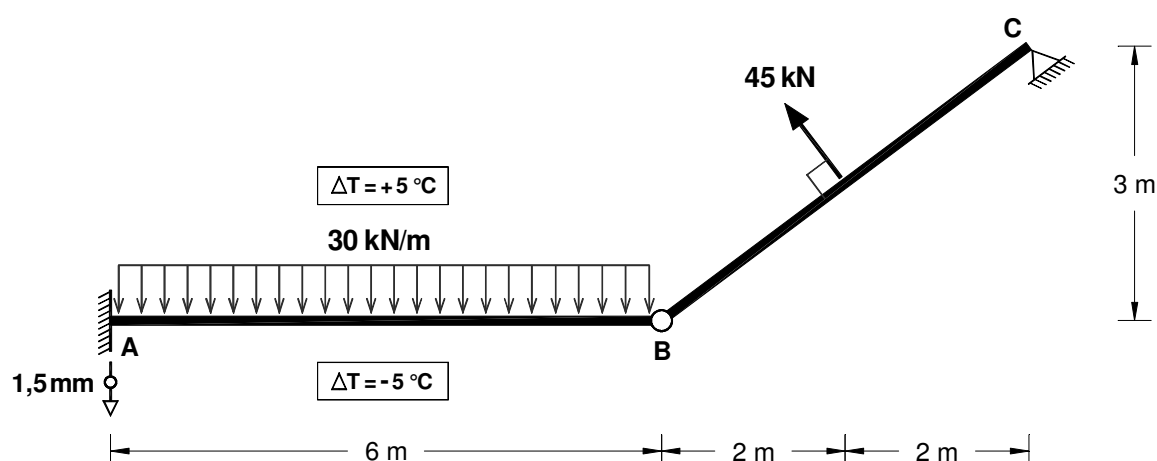
LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

TEORIA DE ESTRUTURAS

MÉTODO DAS FORÇAS

ESTRUTURA CONTÍNUA

EXAME DE ÉPOCA NORMAL - 2020/2021



ISABEL ALVIM TELES

EXERCÍCIO

Considere a estrutura representada na Figura 1, composta por duas barras unidas entre si por uma rótula.

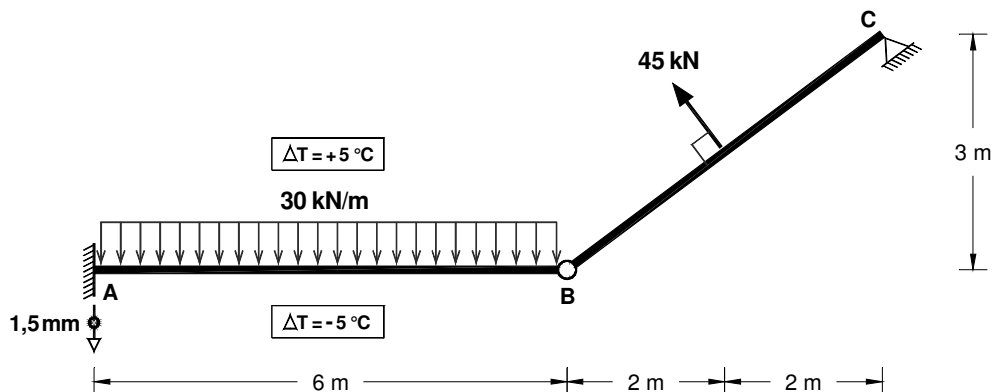


Figura 1

Características das secções transversais de todas as barras		
Secção retangular	$b = 0,60 \text{ m}$	$EI = 135\,000 \text{ kPa} \cdot \text{m}^4$
	$h = 0,30 \text{ m}$	Coef. dilatação térmica: $\alpha = 10^{-5} / ^\circ\text{C}$

A secção transversal das barras que constituem a estrutura apresentam as características acima tabeladas.

Tal como representado na Figura 1, a barra **AB** está submetida a uma variação de temperatura, atuando ainda na estrutura uma carga uniformemente distribuída de **30 kN/m** na barra **AB**, uma força de **45 kN** a meio da barra **BC** e um assentamento vertical de **1,5 mm** do apoio **A**.

Na resolução deste exercício aplique o **Método das Forças** desprezando a deformabilidade por esforço transversal e esforço axial das barras. Adote como sistema base a estrutura representada na Figura 2 onde já se encontram calculadas as reações nos apoios.

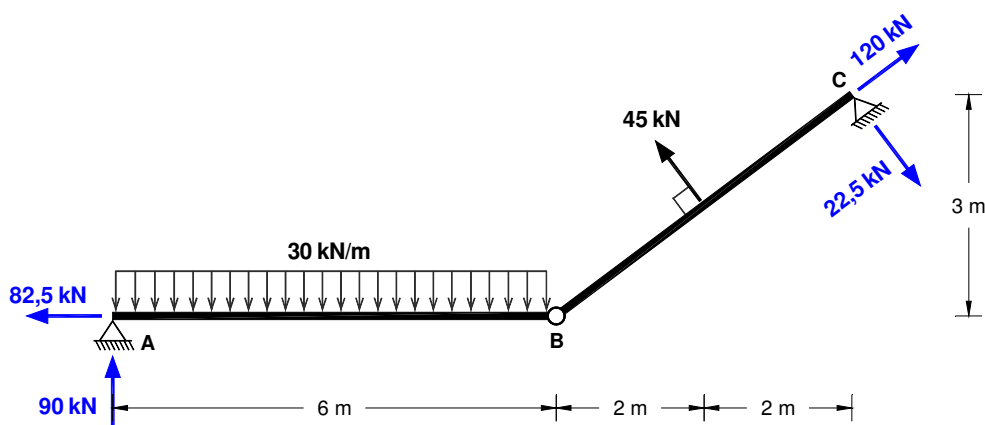


Figura 2

- Determine as reações no apoio **A** da estrutura representada na Figura 1, explicitando claramente os seus sentidos.
- Trace o diagrama de momentos fletores atuantes na barra **AB** da estrutura representada na Figura 1.

RESOLUÇÃO

ALÍNEA a

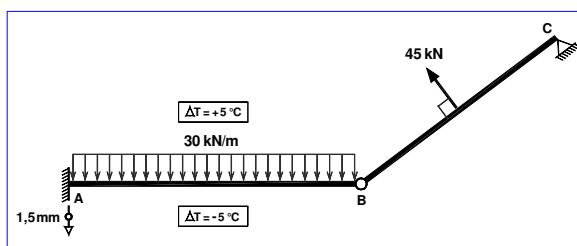
A estrutura da *Figura 1* é hiperestática de grau 1. Vamos adoptar para sistema base (S_0) a estrutura da *Figura 2*.

A estrutura da *Figura 1* (S) vai ser decomposta no sistema S_0 e no sistema S_1 .

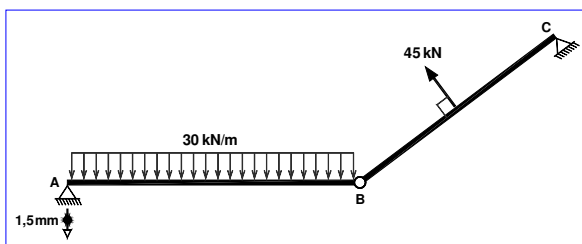
$$S = S_0 + X_1 \times S_1$$

X_1 – incógnita hiperestática, correspondente ao momento do encastramento do apoio A.

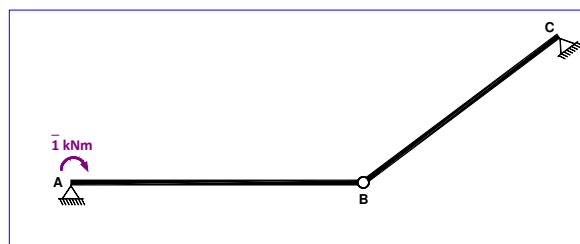
S



S₀



S₁



• Cálculo do sistema S_0

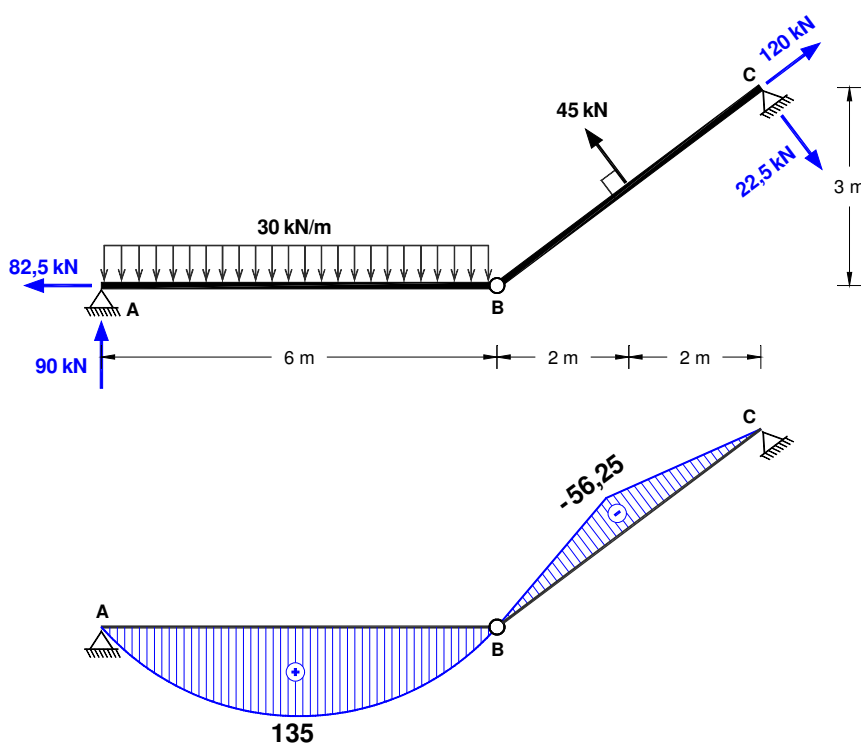
O sistema S_0 já tem as reações calculadas no enunciado.

Como vamos desprezar a deformabilidade por esforço transverso e esforço axial das barras, só é necessário calcular o diagrama de momentos do sistema S_0 .

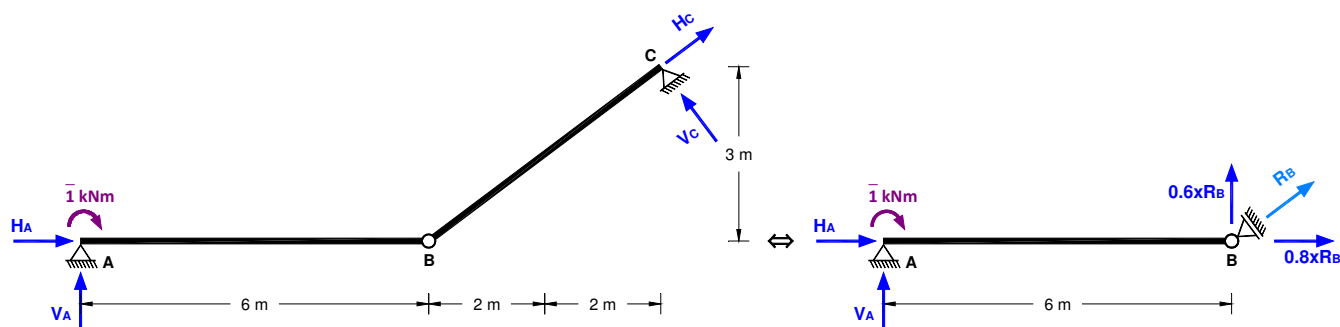
Barra AB

$$M(z) = 90z - 15z^2 \text{ kNm}$$

$$M(z=3) = 135 \text{ kNm}$$



• Cálculo do sistema S1



Como vamos desprezar a deformabilidade por esforço transverso e esforço axial das barras e $T_{med} = 0$ (barra AB), então só é necessário calcular o diagrama de momentos do sistema S_1 .

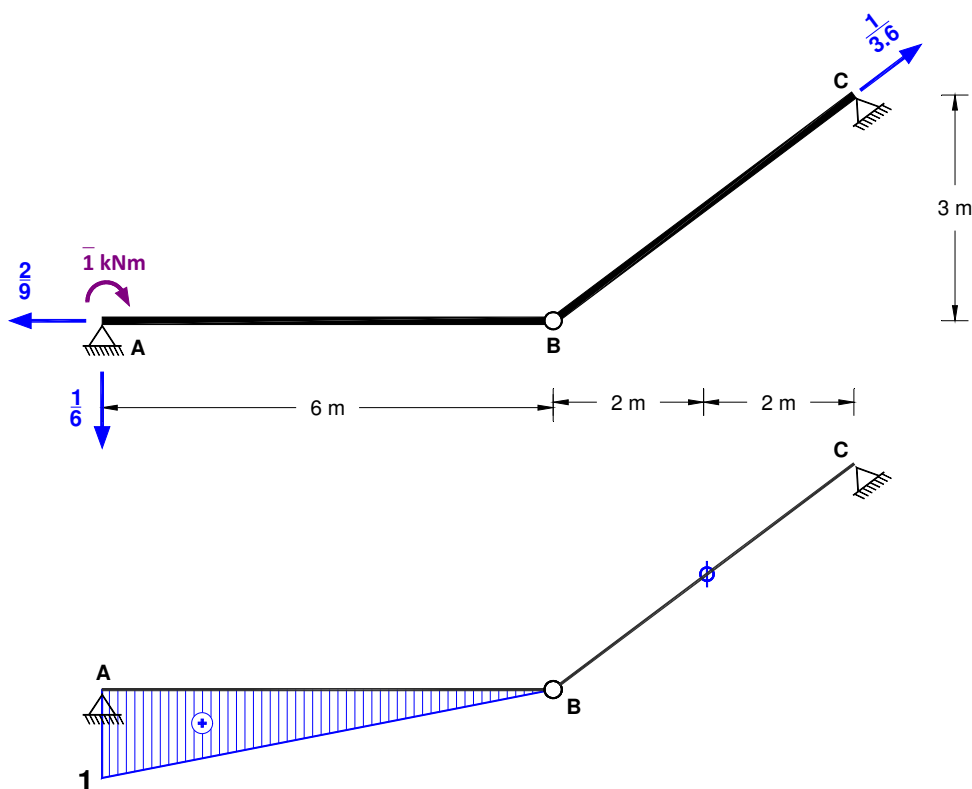
$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A + 0,8 R_B = 0 \\ V_A + 0,6 R_B = 0 \\ 1 + V_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = -\frac{2}{9} \text{ kN} \leftarrow \\ R_B = \frac{1}{3,6} \text{ kN} \nearrow \\ V_A = -\frac{1}{6} \text{ kN} \downarrow \end{cases}$$

Barra AB

$$M(z) = 1 - \frac{1}{6} z \Rightarrow \begin{cases} M(z=0) = 1 \text{ kNm} \\ M(z=6) = 0 \end{cases}$$

Barra BC

$$M(z) = 0$$



• Determinação da incógnita hiperestática

MÉTODO DAS FORÇAS

(desprezando a deformabilidade por esforço axial e esforço transverso)

$$\sum F_{\text{ext } S1} \times \Delta_R = \int \frac{M_1 \cdot M_0}{EI} dz + \int M_1 \cdot \alpha \frac{T_{\text{inf}} - T_{\text{sup}}}{h} dz + \int \frac{M_1 \cdot M_1}{EI} dz \cdot X_1$$

De outra forma:

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0$$

sendo:

$$\delta_{10} = \int \frac{M_1 \cdot M_0}{EI} dz + \int M_1 \cdot \alpha \frac{T_{\text{inf}} - T_{\text{sup}}}{h} dz - \sum F_{\text{ext } S1} \times \Delta_R$$

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1 \cdot M_1}{EI} dz$$

$$EI = 135\,000 \text{ kPa.m}^4$$

$$\int \frac{M_1 \cdot M_0}{EI} dz = \frac{1}{135\,000} \times \frac{1}{3} \times 135 \times 1 \times 6 = 2 \times 10^{-3}$$

$$\int M_1 \cdot \alpha \frac{T_{\text{inf}} - T_{\text{sup}}}{h} dz = \frac{1 \times 6}{2} \times 10^{-5} \times \frac{-5 - 5}{0,30} = -1 \times 10^{-3}$$

$$\int \frac{M_1 \cdot M_1}{EI} dz = \frac{1}{135\,000} \times \frac{2}{6} \times 1 \times 1 \times 6 = \frac{2}{135} \times 10^{-3}$$

$$\sum F_{\text{ext } S1} \times \Delta_R = \frac{1}{6} \times 1,5 \times 10^{-3} = 0,25 \times 10^{-3}$$

$$\delta_{10} = \int \frac{M_1 \cdot M_0}{EI} dz + \int M_1 \cdot \alpha \frac{T_{\text{inf}} - T_{\text{sup}}}{h} dz - \sum F_{\text{ext } S1} \times \Delta_R = 2 \times 10^{-3} - 1 \times 10^{-3} - 0,25 \times 10^{-3} = 0,75 \times 10^{-3}$$

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1 \cdot M_1}{EI} dz = \frac{1}{135\,000} \times \frac{2}{6} \times 1 \times 1 \times 6 = \frac{2}{135} \times 10^{-3}$$

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0,75 \times 10^{-3} + \frac{2}{135} \times 10^{-3} \cdot X_1 = 0$$

$$\Rightarrow X_1 = -50,625$$

• Reações no apoio A

$$M_A = X_1 = 50,625 \text{ kNm} \quad \curvearrowright$$

$$V_A = V_A^{S0} + X_1 \cdot V_A^{S1} = 90 - \frac{1}{6} \times (-50,625) = 98,4375 \text{ kN} \quad \uparrow$$

$$H_A = H_A^{S0} + X_1 \cdot H_A^{S1} = -82,5 - \frac{2}{9} \times (-50,625) = -71,25 \text{ kN} \quad \leftarrow$$

ALÍNEA b

Sistema S_0 - Barra AB $\Rightarrow M(z) = 90z - 15z^2$

Sistema S_1 - Barra AB $\Rightarrow M(z) = 1 - \frac{1}{6}z$

Barra AB $\Rightarrow M = M^{S0} + X_1 \cdot M^{S1}$

$$M(z) = 90z - 15z^2 - 50,625 \times \left(1 - \frac{1}{6}z\right)$$

$$M(z) = -15z^2 + 98,4375z - 50,625$$

Barra AB $\Rightarrow V = V^{S0} + X_1 \cdot V^{S1}$

$$V(z) = 90 - 30z - 50,625 \times \left(-\frac{1}{6}\right) \quad V(z) = 0 \Rightarrow z = 3,28125 \text{ m}$$

$$M_{\text{máx.}} = M(z=3,28125) = 110,874 \text{ kNm}$$

