

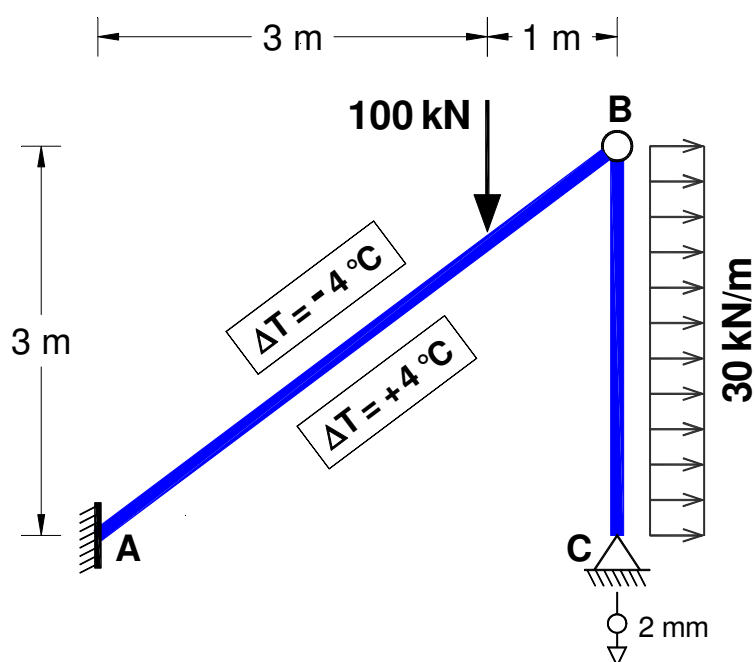
LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

TEORIA DE ESTRUTURAS

MÉTODO DAS FORÇAS

ESTRUTURA CONTÍNUA

EXAME DE ÉPOCA DE RECURSO - 2022/2023



ISABEL ALVIM TELES

EXERCÍCIO

Considere a estrutura representada na *Figura 1*, composta por duas barras contínuas (AB e BC) unidas entre si por uma rótula em B.

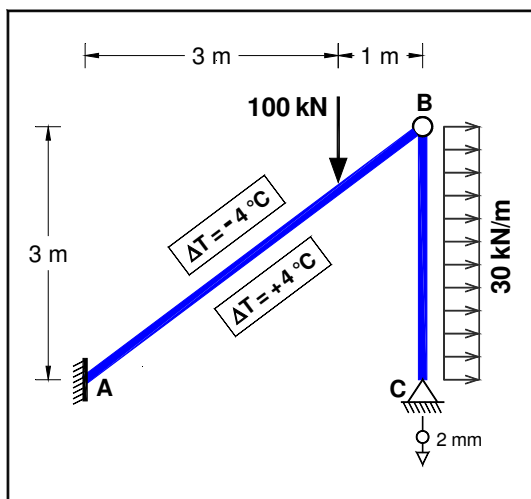


Figura 1 - Estrutura

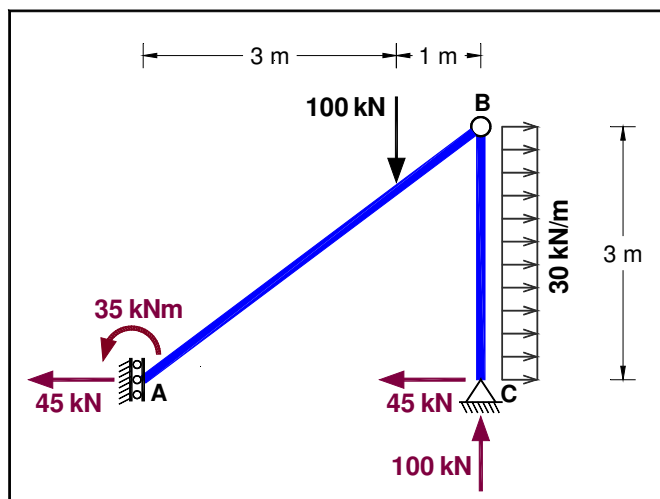


Figura 2 – Sistema base

Características das secções transversais das barras AB e BC

Secção retangular	$\begin{cases} b=0,40\text{ m} \\ h=0,60\text{ m} \end{cases}$	$E = 20\text{ GPa}$	Coeficiente de dilatação térmica: $\alpha = 10^{-5} / ^\circ\text{C}$
-------------------	--	---------------------	---

A secção transversal das barras que constituem a estrutura apresentam as características acima tabeladas.

Tal como representado na *Figura 1*, a barra AB está submetida a uma variação diferencial de temperatura ($\Delta T = -4\text{ }^\circ\text{C}$ na zona superior e $\Delta T = +4\text{ }^\circ\text{C}$ na zona inferior). Na estrutura estão ainda a atuar uma força vertical de **100 kN** na barra AB, uma carga uniformemente distribuída de **30 kN/m** na barra BC e um assentamento vertical do apoio C de **2 mm**.

Na resolução deste exercício aplique o **Método das Forças** desprezando a deformabilidade por esforço transversal e esforço axial das barras contínuas. Adote como sistema base a estrutura representada na *Figura 2*, onde já se encontram calculadas as reações nos apoios.

- Determine as reações no apoio A da estrutura representada na *Figura 1*, explicitando claramente os seus sentidos.
- Trace o diagrama de momentos fletores atuantes na barra AB da estrutura representada na *Figura 1*.

RESOLUÇÃO

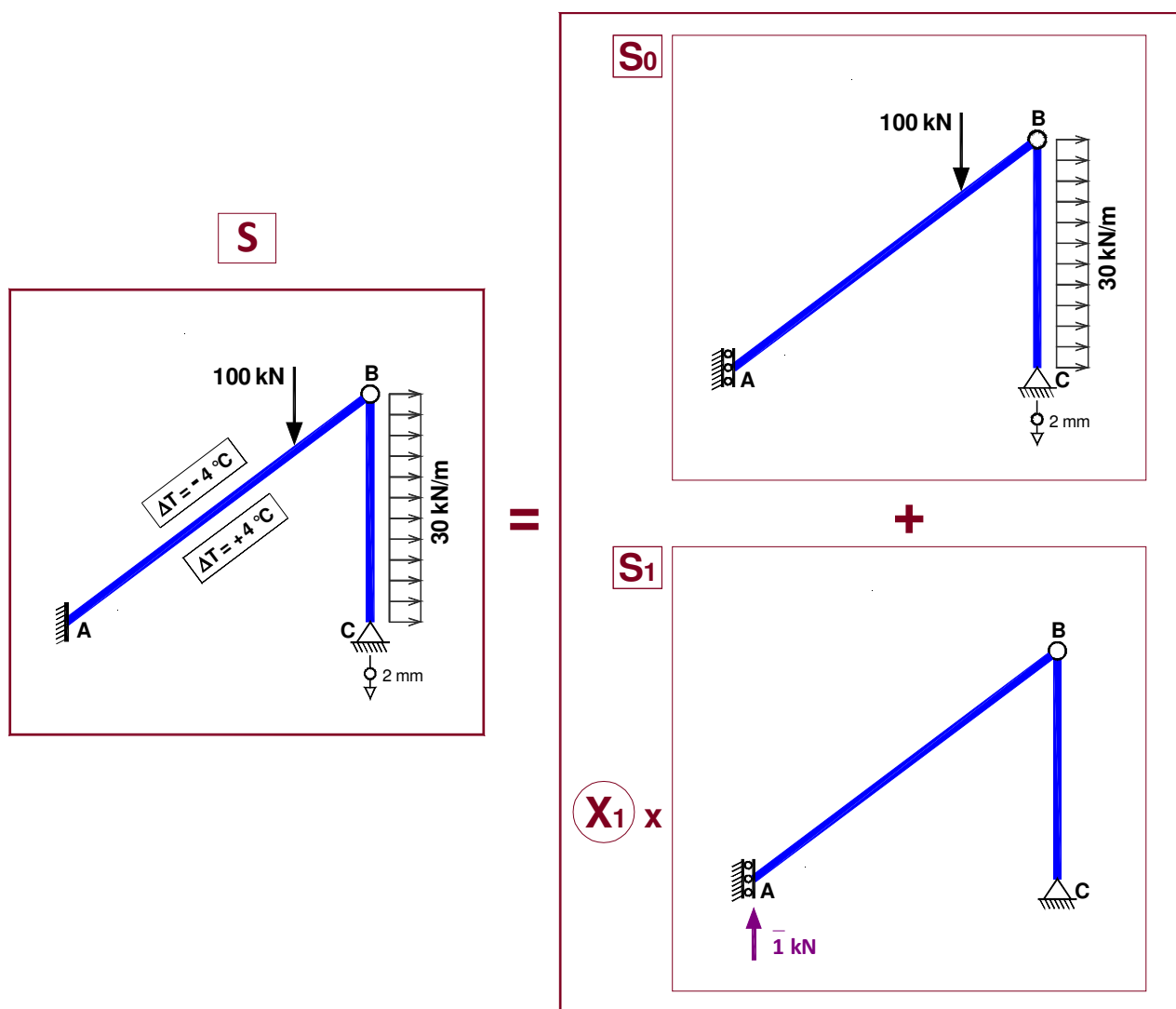
ALÍNEA a

A estrutura da *Figura 1* é hiperestática de grau 1. Vamos adoptar para sistema base (S_0) a estrutura da *Figura 2*.

A estrutura da *Figura 1* (S) vai ser decomposta no sistema S_0 e no sistema S_1 .

$$S = S_0 + X_1 \times S_1$$

X_1 – incógnita hiperestática, correspondente à reação vertical no apoio A.



• **Cálculo do sistema S_0**

O sistema S_0 já tem as reações calculadas no enunciado.

Como vamos desprezar a deformabilidade por esforço transversal e esforço axial das barras, só é necessário calcular o diagrama de momentos do sistema S_0 .

Barra AB

$$M_A = -35 \text{ kNm}$$

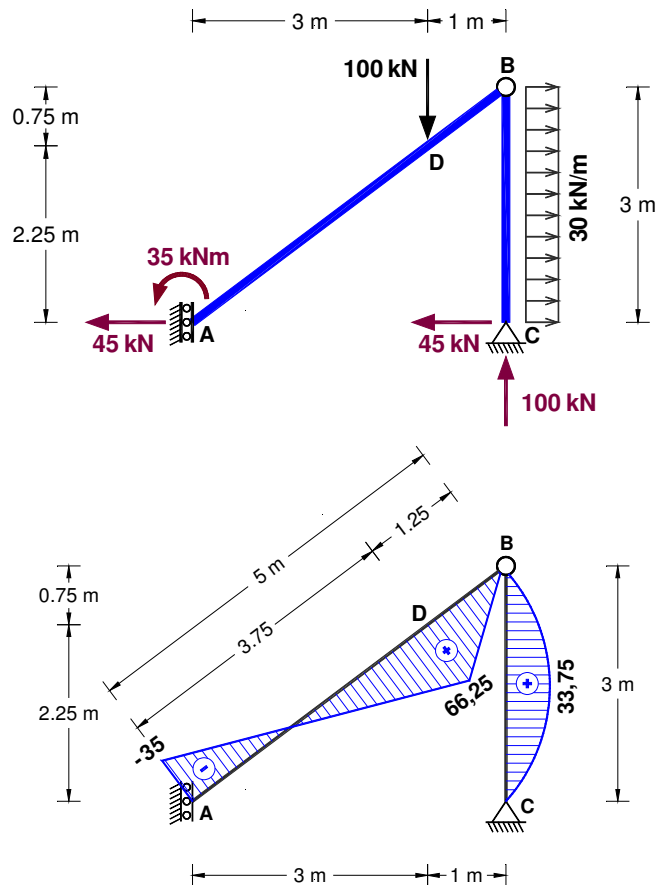
$$M_D = -35 + 45 \times 2,25 = 66,25 \text{ kNm}$$

$$M_B = -35 + 45 \times 3 - 100 \times 1 = 0$$

Barra CB

$$M(z) = 45z - 15z^2 \text{ kNm}$$

$$M(z=1,5) = 33,75 \text{ kNm}$$

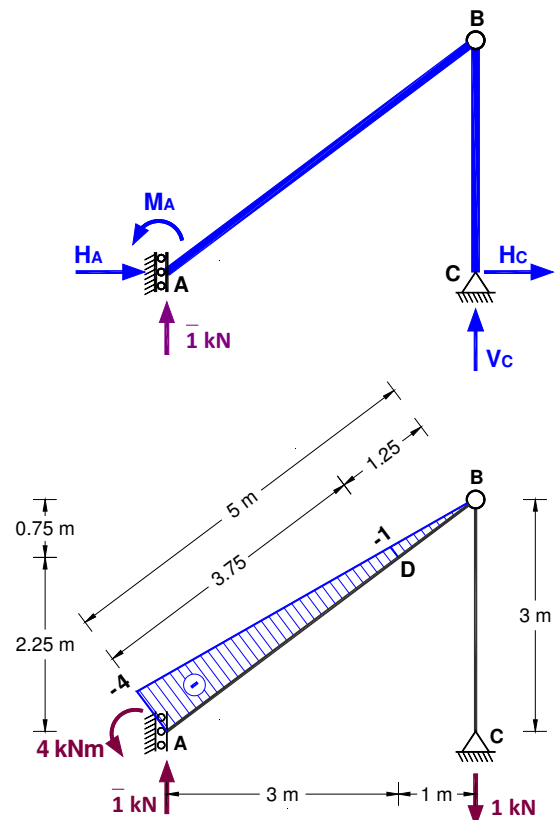


• **Cálculo do sistema S_1**

Como vamos desprezar a deformabilidade por esforço transversal e esforço axial das barras e $T_{med} = 0$ (barra AB), então só é necessário calcular o diagrama de momentos do sistema S_1 .

$$\begin{cases} \text{Toda a est.} & \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \\ \text{Corpo CB} & \begin{cases} \sum M_C = 0 \\ \sum M_{rot.B} = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_A + H_C = 0 \\ V_C + 1 = 0 \\ M_A - 1 \times 4 = 0 \\ H_C \times 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = 0 \\ V_C = -1 \text{ kN} \downarrow \\ M_A = 4 \text{ kNm} \curvearrowright \\ H_C = 0 \end{cases}$$



Barra AB

$$M_A = -4 \text{ kNm}$$

$$M_D = -4 + 1 \times 3 = -1 \text{ kNm}$$

$$M_B = -4 + 1 \times 4 = 0$$

Barra CB $\Rightarrow M = 0$

• **Determinação da incógnita hiperestática**

MÉTODO DAS FORÇAS

(desprezando a deformabilidade por esforço axial e esforço transverso)

$$\sum F_{\text{ext } S1} \times \Delta_R = \int \frac{M_1 \cdot M_0}{EI} dz + \int M_1 \cdot \alpha \frac{T_{\text{inf}} - T_{\text{sup}}}{h} dz + \int \frac{M_1 \cdot M_1}{EI} dz \cdot X_1$$

De outra forma:

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0$$

sendo:

$$\delta_{10} = \int \frac{M_1 \cdot M_0}{EI} dz + \int M_1 \cdot \alpha \frac{T_{\text{inf}} - T_{\text{sup}}}{h} dz - \sum F_{\text{ext } S1} \times \Delta_R$$

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1 \cdot M_1}{EI} dz$$

$$EI = 20 \times 10^6 \times \frac{0,40 \times 0,60^3}{12} = 144 \text{ 000 kPa.m}^4$$

$$\int \frac{M_1 \cdot M_0}{EI} dz = \frac{1}{144 \text{ 000}} \times \left[\frac{3,75}{6} [2 \times (-35) \times (-4) + 2 \times 66,25 \times (-1) + (-35) \times (-1) + 66,25 \times (-4)] \right] +$$

$$+ \frac{1}{144 \text{ 000}} \times \frac{66,25 \times (-1) \times 1,25}{3} = \frac{1}{144 \text{ 000}} \times \frac{(-237,5)}{3}$$

$$\int \frac{M_1 \cdot M_1}{EI} dz = \frac{1}{144 \text{ 000}} \times \frac{(-4) \times (-4) \times 5}{3} = \frac{1}{144 \text{ 000}} \times \frac{80}{3}$$

$$\int M_1 \cdot \alpha \frac{T_{\text{inf}} - T_{\text{sup}}}{h} dz = \frac{5 \times (-4)}{2} \times 10^{-5} \times \frac{4 - (-4)}{0,60} = -\frac{40}{3} \times 10^{-4}$$

$$\sum F_{\text{ext } S1} \times \Delta_R = -1 \times (-2) \times 10^{-3} = 2 \times 10^{-3}$$

$$\delta_{10} = \int \frac{M_1 \cdot M_0}{EI} dz + \int M_1 \cdot \alpha \frac{T_{\text{inf}} - T_{\text{sup}}}{h} dz - \sum F_{\text{ext}} S_1 \times \Delta_R =$$

$$= \frac{1}{144\,000} \times \frac{(-237,5)}{3} - \frac{40}{3} \times 10^{-4} - 2 \times 10^{-3} = -3,8831 \times 10^{-3}$$

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1 \cdot M_1}{EI} dz = \frac{1}{144\,000} \times \frac{80}{3} = 1,85185 \times 10^{-4}$$

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \Rightarrow -3,8831 \times 10^{-3} + 1,85185 \times 10^{-4} \cdot X_1 = 0$$

$$\Rightarrow X_1 = 20,969$$

• Reações no apoio A

$$V_A = X_1 = 20,969 \text{ kN } \uparrow$$

$$H_A = H_A^{S0} + X_1 \cdot H_A^{S1} = 45 + 20,969 \times 0 = 45 \text{ kN } \leftarrow$$

$$M_A = M_A^{S0} + X_1 \cdot M_A^{S1} = 35 + 20,969 \times 4 = 118,876 \text{ kNm } \curvearrowright$$

ALÍNEA b

$$\text{Barra AB} \Rightarrow M = M^{S0} + X_1 \cdot M^{S1}$$

$$M_A = -35 + 20,969 \times (-4) = -118,875 \text{ kNm}$$

$$M_D = 66,25 + 20,969 \times (-1) = 45,281 \text{ kNm}$$

$$M_B = 0 + 20,969 \times 0 = 0$$

