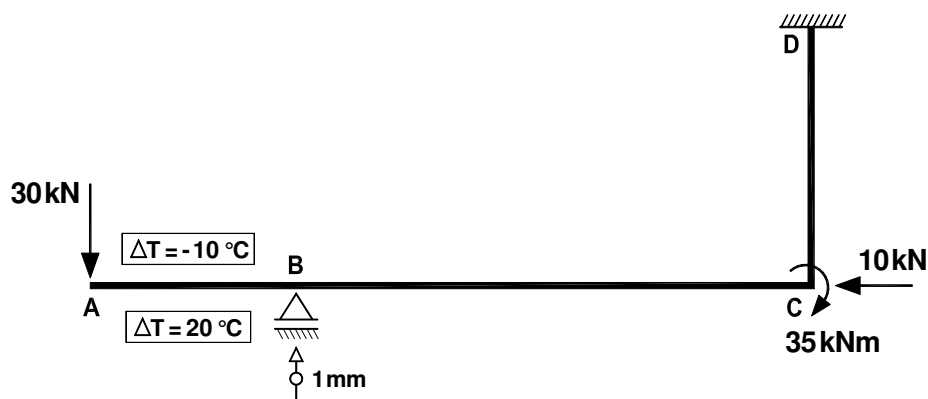


LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

TEORIA DE ESTRUTURAS

MÉTODO DAS FORÇAS

EXAME – 12 / MAIO / 2014



ESTRUTURA CONTÍNUA HIPERESTÁTICA

ISABEL ALVIM TELES

EXERCÍCIO – EXAME 12/MAIO/2014

Considere a estrutura representada na *Figura 1*, submetida às acções aí representadas e que incluem as variações de temperatura da barra **AB** e o deslocamento de 1 mm do apoio **B**.

Dados: Características do material constituinte das barras: $E = 20 \text{ GPa}$; $\alpha = 1,2 \times 10^{-5}/^{\circ}\text{C}$

Secção transversal das barras: $(b \times h) = (0,30 \times 0,50) \text{ m}^2$

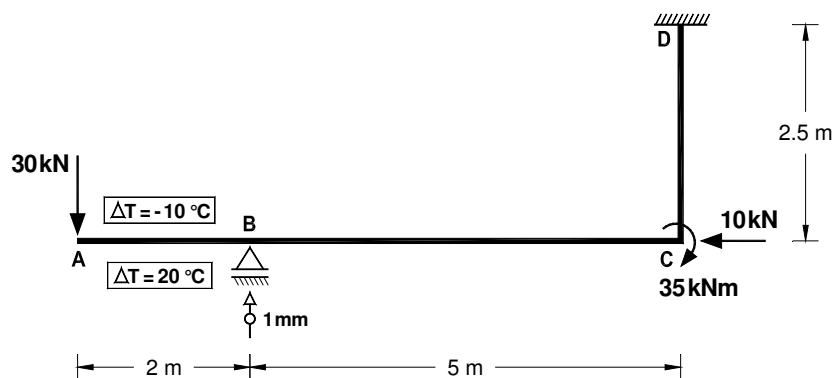
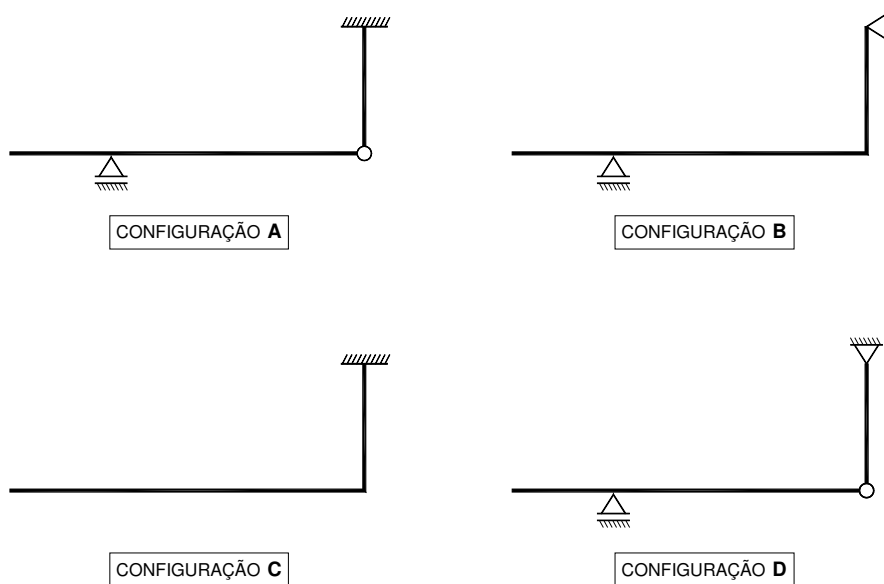


Figura 1

- a) Das configurações **A**, **B**, **C** e **D** abaixo representadas, indique justificando convenientemente, quais poderão constituir sistema base para a estrutura da *Figura 1*;



- b) Determine as reacções nos apoios da estrutura da *Figura 1* e desenhe os diagramas de esforço axial (**N**), esforço transversal (**V**) e momento flector (**M**) na barra **CD**;
- c) Determine o deslocamento horizontal do ponto **C**.

RESOLUÇÃO

Alínea a)

A estrutura da *Figura 1* tem **4** ligações ao exterior: 3 reações no encastramento **D** e 1 reação vertical no apoio simples em **B**.

Podem ser escritas **3** equações de equilíbrio (equações fundamentais de estática).

Temos então **4** incógnitas e **3** equações, pelo que a estrutura é **hiperestática de grau 1**.

As estruturas das configurações **A**, **B** e **C** podem constituir sistema-base da estrutura da *Figura 1*, pois são estruturas isostáticas.

Configuração **A**: 4 incógnitas (3 reações do encastramento e uma reação no apoio simples)
4 equações (3 equações de equilíbrio para toda a estrutura e uma equação de momentos na rótula de um dos corpos)

Configurações **B** e **C**: 3 incógnitas (correspondentes às reações dos apoios)
3 equações (equações fundamentais da estática)

A estrutura da configuração **D** é uma estrutura hipoestática, logo não pode constituir sistema-base.

Alínea b)

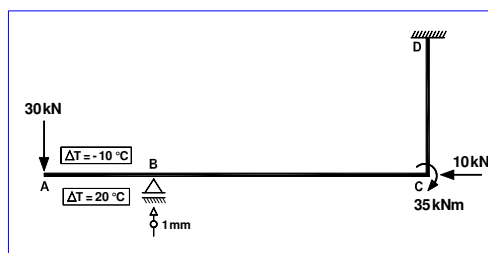
Vamos adoptar para sistema base (**S₀**) a **configuração C**.

A estrutura da *Figura 1* (**S**) vai ser decomposta no sistema **S₀** e no sistema **S₁**.

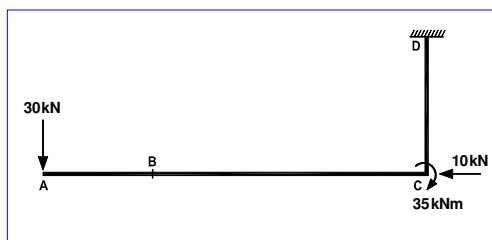
$$S = S_0 + X_1 \times S_1$$

X₁ – incógnita hiperestática, correspondente à reação vertical no apoio **B**.

S

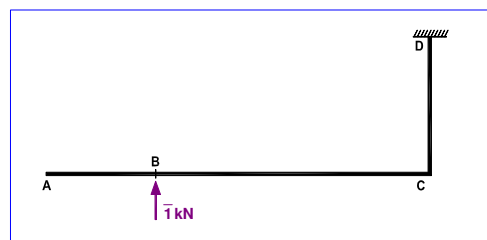


S₀



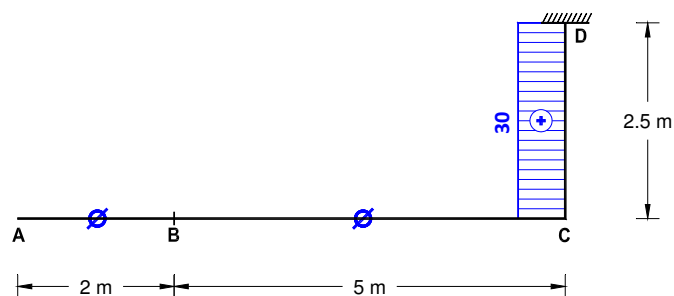
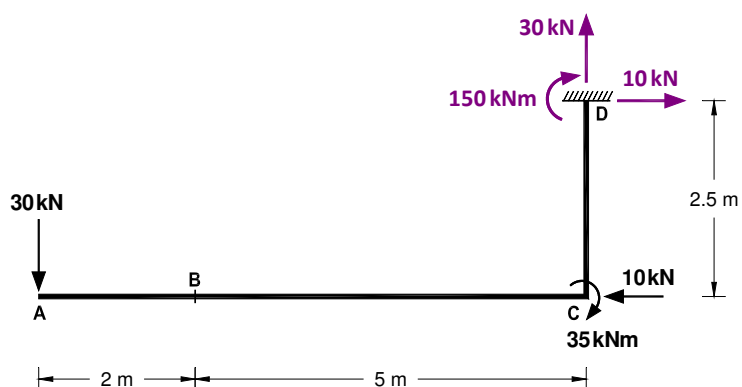
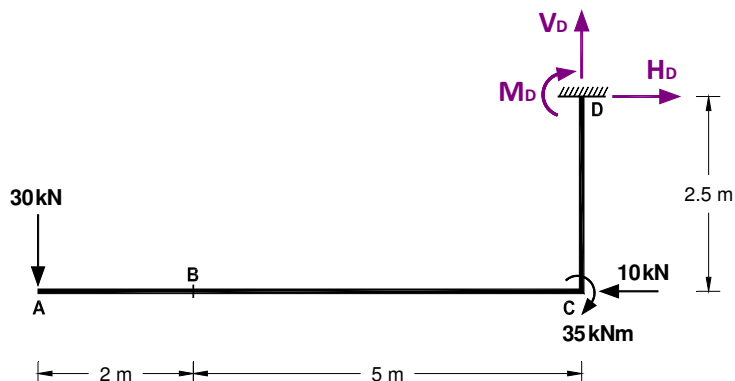
+ **X₁** x

S₁

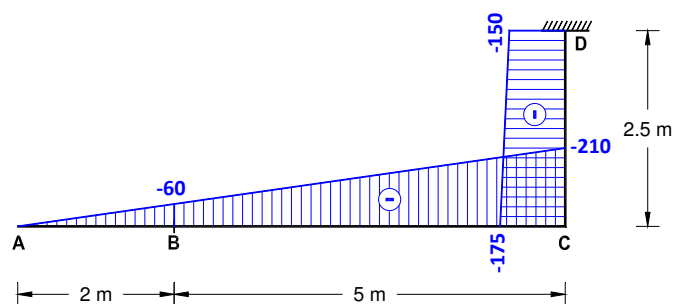


• Cálculo da estrutura S_0

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_D = 10 \text{ kN} \rightarrow \\ V_D = 30 \text{ kN} \uparrow \\ M_D = 150 \text{ kNm} \curvearrowright \end{cases}$$



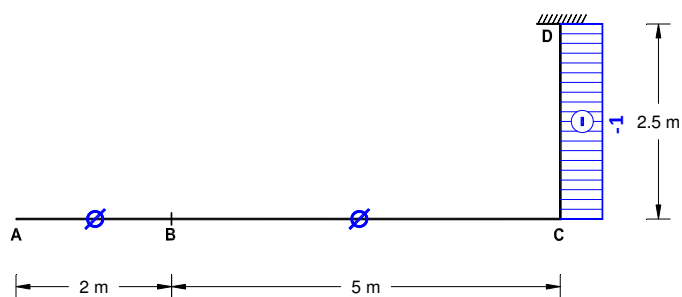
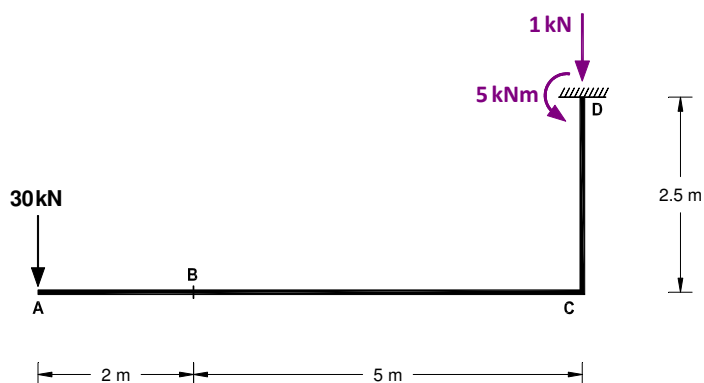
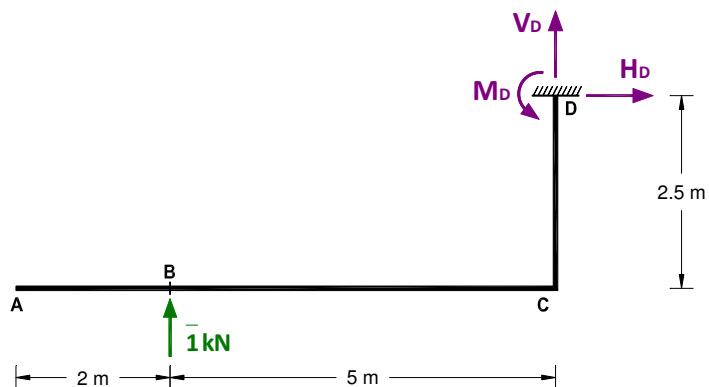
Sistema base S_0 - Diagrama de esforços axiais (kN)



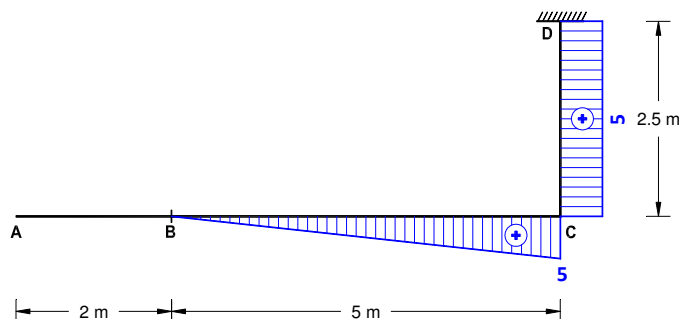
Sistema base S_0 - Diagrama de momentos flectores (kNm)

• Cálculo da estrutura S₁

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_D = 0 \\ V_D = -1 \text{ kN} \downarrow \\ M_D = 5 \text{ kNm} \curvearrowright \end{cases}$$



Sistema S₁ - Diagrama de esforços axiais (kN)



Sistema S₁ - Diagrama de momentos flectores (kNm)

• Determinação da incógnita hiperestática

MÉTODO DAS FORÇAS

(desprezando a deformabilidade por esforço transversal)

$$\Sigma F_{\text{ext}}^{S_1} \times \Delta_R = \int \frac{N_1 \cdot N_0}{EA} dz + \int \frac{M_1 \cdot M_0}{EI} dz + \int N_1 \cdot \alpha \cdot T_{\text{méd}} dz + \int M_1 \cdot \alpha \cdot \frac{T_{\text{inf}} - T_{\text{sup}}}{h} dz + \left(\int \frac{N_1 \cdot N_1}{EA} dz + \int \frac{M_1 \cdot M_1}{EI} dz \right) \cdot X_1$$

De outra forma:

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0$$

sendo:

$$\delta_{10} = \int \frac{N_1 \cdot N_0}{EA} dz + \int \frac{M_1 \cdot M_0}{EI} dz + \int N_1 \cdot \alpha \cdot T_{\text{méd}} dz + \int M_1 \cdot \alpha \cdot \frac{T_{\text{inf}} - T_{\text{sup}}}{h} dz - \Sigma F_{\text{ext}}^{S_1} \times \Delta_R$$

$$\delta_{11} = \int \frac{N_1 \cdot N_1}{EA} dz + \int \frac{M_1 \cdot M_1}{EI} dz$$

$$EI = 20 \times 10^6 \times \frac{0,30 \times 0,50^3}{12} = 62\,500 \text{ kPa} \times \text{m}^4$$

$$EA = 20 \times 10^6 \times 0,30 \times 0,50 = 3 \times 10^6 \text{ kPa} \times \text{m}^2$$

$$T_{\text{méd}} = \frac{-10 + 20}{2} = 5 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$\frac{T_{\text{inf}} - T_{\text{sup}}}{h} = \frac{20 - (-10)}{0,50} = 60$$

$$\int \frac{N_1 \cdot N_0}{EA} dz = \frac{1}{3 \times 10^6} \times (-1) \times 30 \times 2,5 = -25 \times 10^{-6}$$

$$\int \frac{M_1 \cdot M_0}{EI} dz = \frac{1}{62\,500} \left[\frac{5 \times 5}{6} \times (-60 + 2 \times (-210)) + \frac{5 \times 2,5}{2} \times (-150 - 175) \right] = -6,45 \times 10^{-2}$$

$$\int N_1 \cdot \alpha \cdot T_{\text{méd}} dz = 0$$

$$\int M_1 \cdot \alpha \cdot \frac{T_{\text{inf}} - T_{\text{sup}}}{h} dz = 0$$

$$\begin{aligned} \delta_{10} &= \int \frac{N_1 \cdot N_0}{EA} dz + \int \frac{M_1 \cdot M_0}{EI} dz + \int N_1 \cdot \alpha \cdot T_{\text{méd}} dz + \int M_1 \cdot \alpha \cdot \frac{T_{\text{inf}} - T_{\text{sup}}}{h} dz - \Sigma F_{\text{ext}}^{S_1} \times \Delta_R = \\ &= -25 \times 10^{-6} - 6,45 \times 10^{-2} + 0 + 0 - 1 \times 0,001 = -6,5525 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

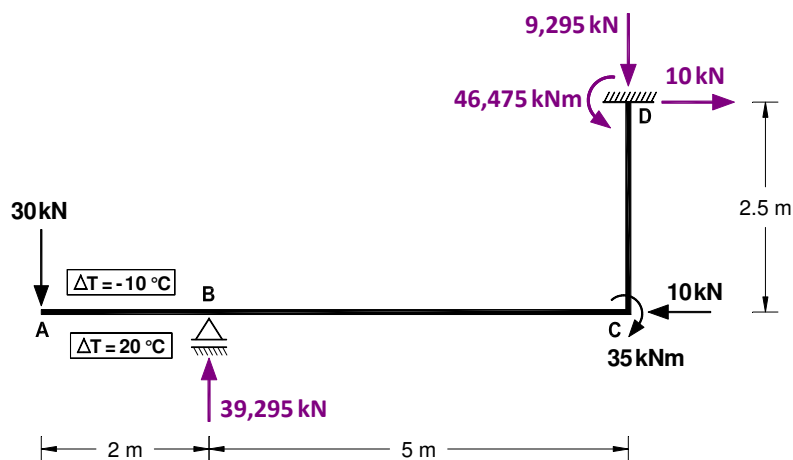
$$\delta_{11} = \int \frac{N_1 \cdot N_1}{EA} dz + \int \frac{M_1 \cdot M_1}{EI} dz = \frac{1}{3 \times 10^6} \times 2,5 + \frac{1}{62500} \left(\frac{5 \times 5 \times 5}{3} + 5 \times 5 \times 2,5 \right) = 1,6675 \times 10^{-3}$$

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \Rightarrow -6,5525 \times 10^{-2} + 1,6675 \times 10^{-3} \cdot X_1 = 0$$

$$\Rightarrow X_1 = 39,295$$

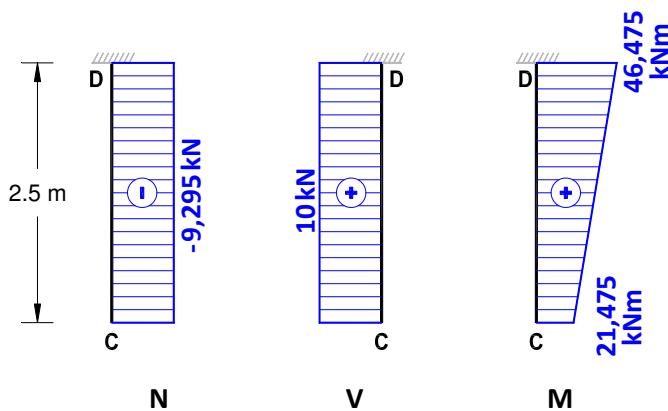
$$\Rightarrow V_B = 39,295 \text{ kN } \uparrow$$

$$\begin{cases} V_B = 39,295 \text{ kNm} \\ H_D = (H_D)^{S0} + X_1 \cdot (H_D)^{S1} \\ V_D = (V_D)^{S0} + X_1 \cdot (V_D)^{S1} \\ M_D = (M_D)^{S0} + X_1 \cdot (M_D)^{S1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_B = 39,295 \text{ kNm} \\ H_D = 10 + 0 \times 39,295 \\ V_D = 30 - 1 \times 39,295 \\ M_D = -150 + 5 \times 39,295 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_B = 39,295 \text{ kN } \uparrow \\ H_D = 10 \text{ kN } \rightarrow \\ V_D = -9,295 \text{ kN } \downarrow \\ M_D = 46,475 \text{ kNm } \curvearrowright \end{cases}$$



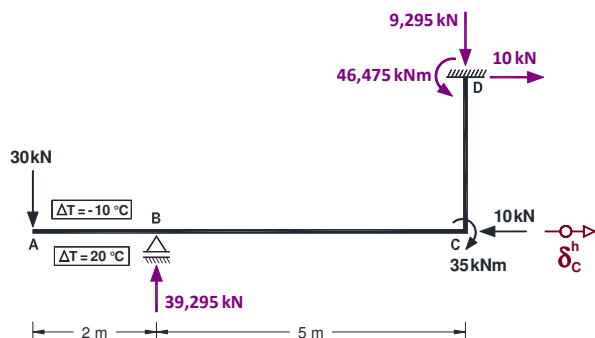
$$\begin{cases} N = -9,295 \text{ kN} \\ V = 10 \text{ kN} \\ M = 46,475 \text{ kNm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} N = -9,295 \text{ kN} \\ V = 10 \text{ kN} \\ M = 21,475 \text{ kNm} \end{cases}$$

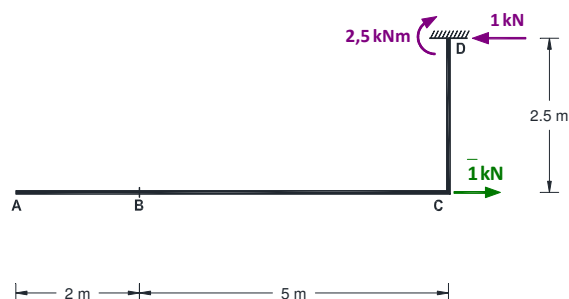


Alínea c)

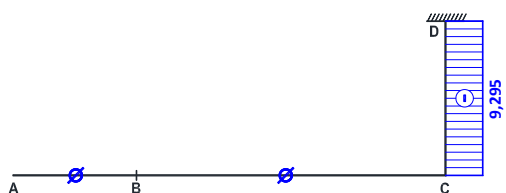
S – SISTEMA REAL



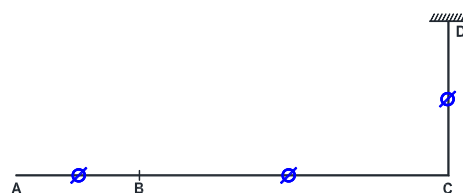
$\bar{S}$ – SISTEMA VIRTUAL



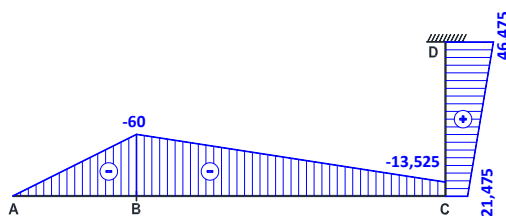
S – Esforço axial (kN)



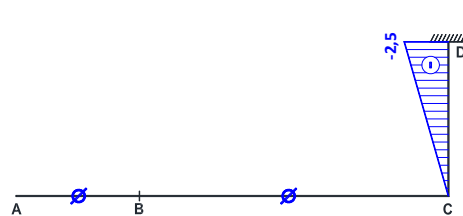
$\bar{S}$ – Esforço axial (kN)



S – Momento fletor (kNm)



$\bar{S}$ – Momento fletor (kNm)



TEOREMA DOS TRABALHOS VIRTUAIS (desprezando a contribuição do esforço transversal):

$$\bar{1} \times \delta_C^h + \sum (\bar{R} \times \text{assent. apoio}) = \int \frac{\bar{N} \times N}{EA} dz + \int \frac{\bar{M} \times M}{EI} dz + \int \bar{N} \cdot \alpha \cdot T_m \cdot dz + \int \bar{M} \cdot \alpha \cdot \frac{T_{\text{inf}} - T_{\text{sup}}}{h} dz$$

$$\sum (\bar{R} \times \text{assent. apoio}) = 0 \quad \int \frac{\bar{N} \times N}{EA} dz = 0 \quad \int \bar{N} \cdot \alpha \cdot T_m \cdot dz = 0 \quad \int \bar{M} \cdot \alpha \cdot \frac{T_{\text{inf}} - T_{\text{sup}}}{h} dz = 0$$

$$\delta_C^h = \int \frac{\bar{M} \times M}{EI} dz = \frac{1}{62500} \left[\frac{(-2,5) \times 2,5}{6} (21,475 + 2 \times 46,475) \right] = -1,907 \times 10^{-3} \text{ m} = -1,907 \text{ mm} \leftarrow$$