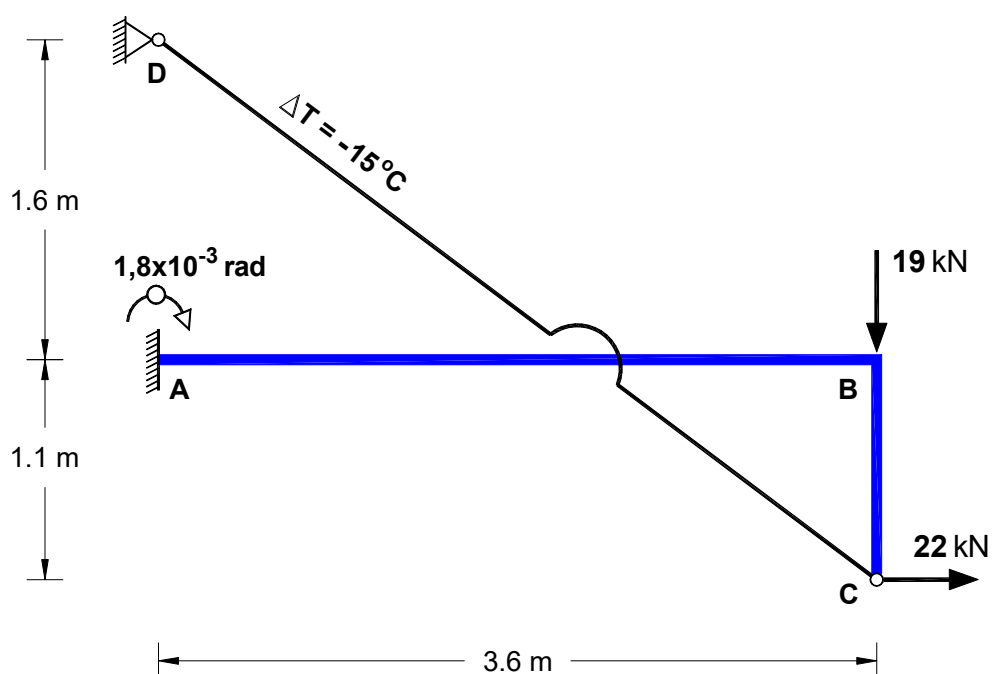


LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

TEORIA DE ESTRUTURAS



MÉTODO DAS FORÇAS

ESTRUTURA MISTA

EXAME – 10 / SETEMBRO / 2020

ISABEL ALVIM TELES

EXERCÍCIO DO EXAME DE ÉPOCA ESPECIAL – 10/SETEMBRO/2020

Considere a estrutura representada na *Figura 1*, composta por um corpo contínuo ABC e uma barra bi-articulada CD.

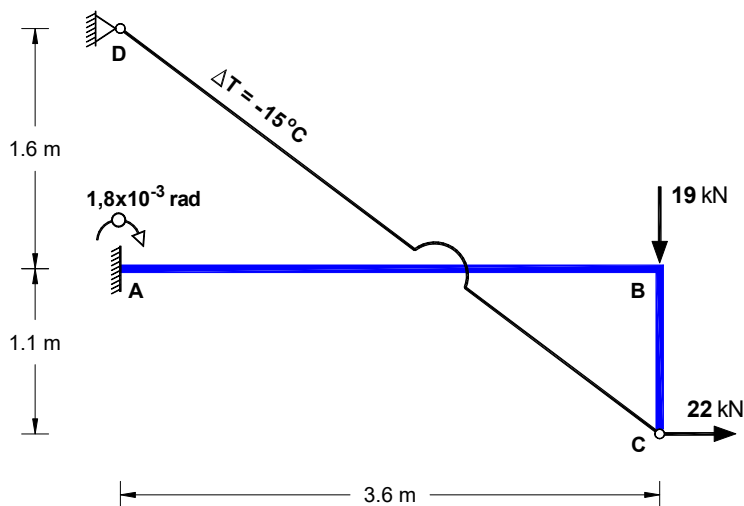


Figura 1

Características das secções transversais das barras	
Barras <u>ABC</u>	Barra <u>CD</u>
Área = 132 cm ²	Secção quadrada
Inércia = 5324 cm ⁴	b = h = 9 cm

A secção transversal das barras que constituem a estrutura apresentam as características acima tabeladas e estão realizadas com um material que possui módulo de elasticidade $E = 100 \text{ GPa}$ e coeficiente de dilatação térmica $\alpha = 1,2 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$.

Tal como representado na *Figura 1*, a barra CD está submetida a uma variação uniforme de temperatura de $\Delta T = -15 ^\circ\text{C}$, atuando ainda na estrutura uma força vertical de **19 kN** em **B**, uma força horizontal de **22 kN** em **C** e um assentamento de apoio correspondente a uma rotação de $1,8 \times 10^{-3} \text{ rad}$ do encastramento em **A**.

Na resolução deste exercício aplique o **Método das Forças** desprezando a deformabilidade por esforço transversal e esforço axial das barras contínuas. Adote como incógnita hiperestática o esforço axial da barra bi-articulada CD e tenha em consideração o diagrama de momentos fletores do sistema base da *Figura 2*.

- Determine a incógnita hiperestática, explicitando claramente se o esforço instalado na barra CD é de tração ou compressão.
- Determine as reações nos apoios **A** e **D**, explicitando claramente os seus sentidos.
- Trace o diagrama de momentos fletores atuantes nas barras ABC da estrutura representada na *Figura 1*.

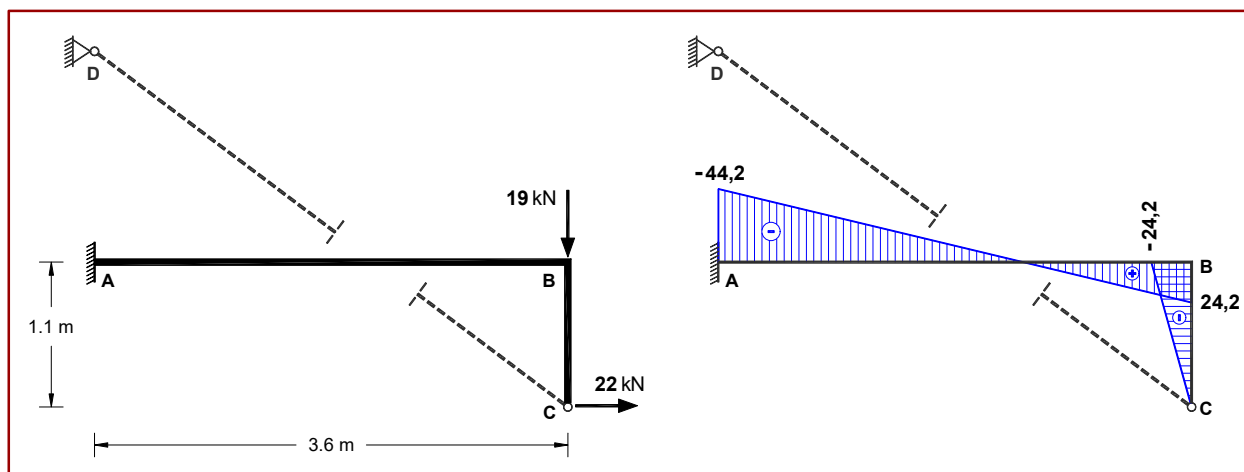


Figura 2

RESOLUÇÃO

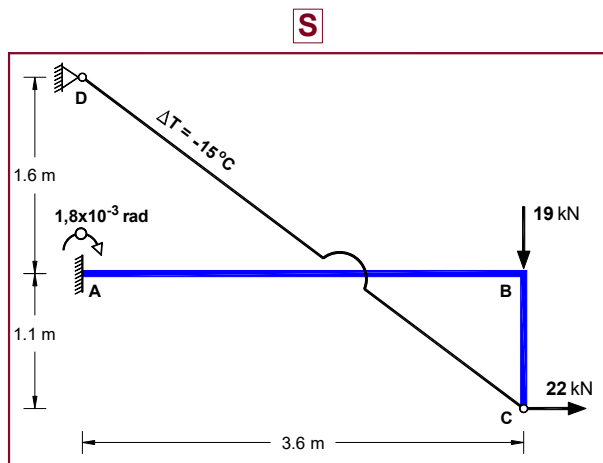
ALÍNEA a

Tal como explicitado no enunciado, a incógnita hiperestática corresponderá ao esforço axial da barra bi-articulada **CD**.

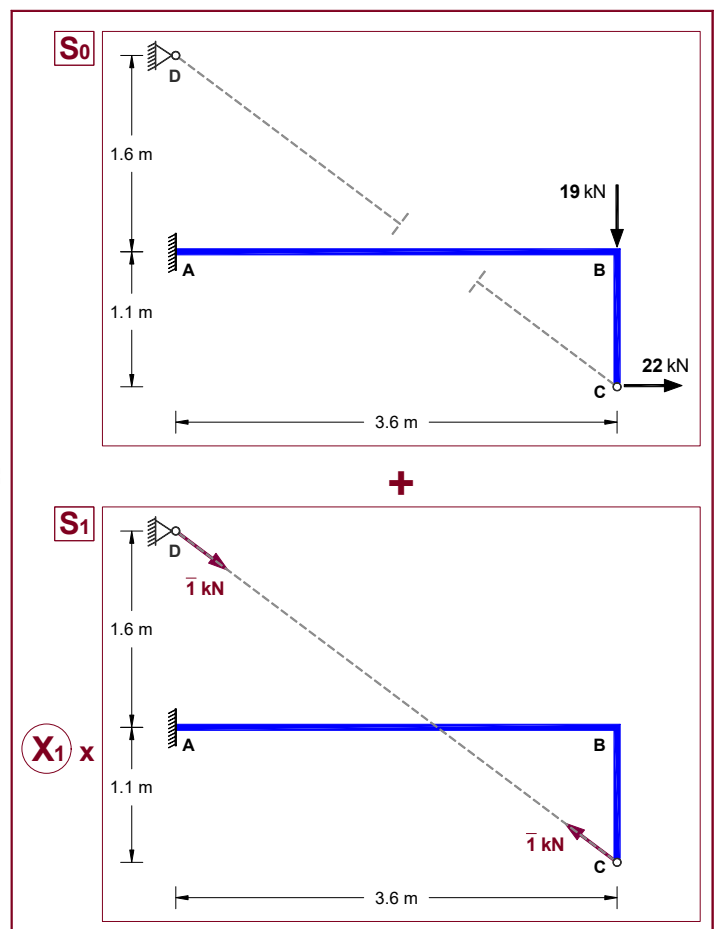
A estrutura (**S**) vai ser decomposta no sistema base **S₀** representado na *Figura 2* e no sistema **S₁** abaixo ilustrado.

$$S = S_0 + X_1 \times S_1$$

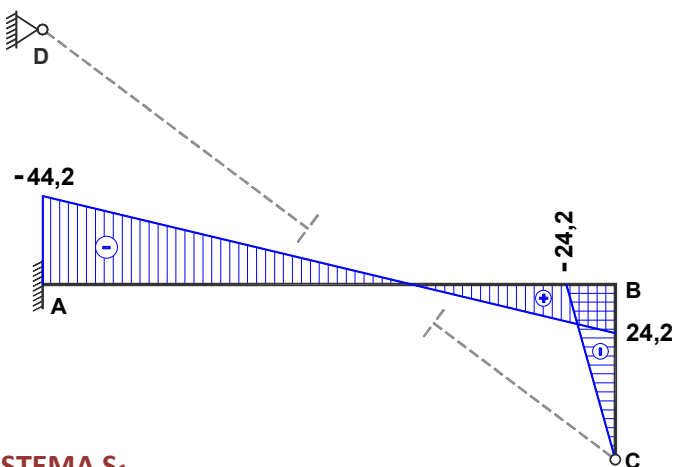
X₁ – incógnita hiperestática correspondente ao o esforço axial da barra bi-articulada **CD**.



=



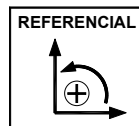
• **SISTEMA S_0**



M_0 - **Momento Fletor (kNm)**

• **SISTEMA S_1**

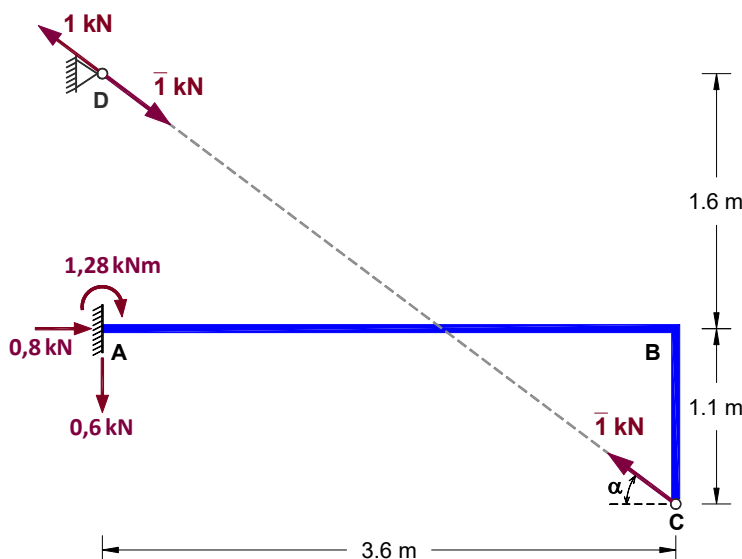
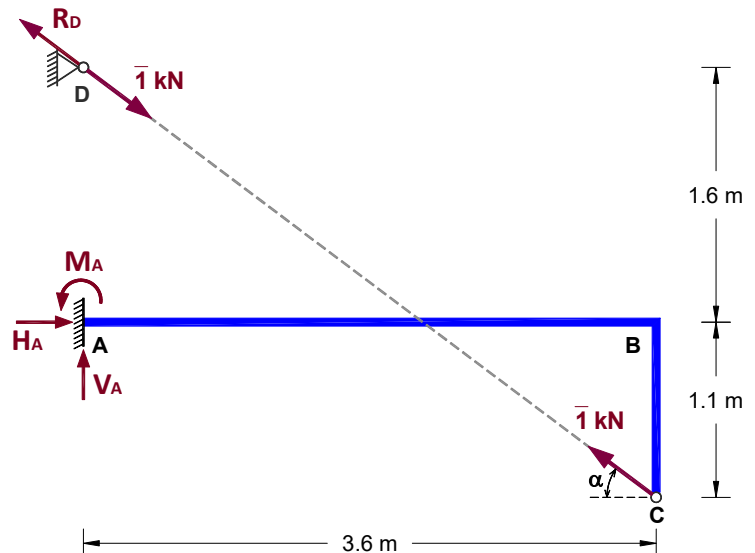
$$\alpha \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0,8 \\ \sin \alpha = 0,6 \end{cases}$$



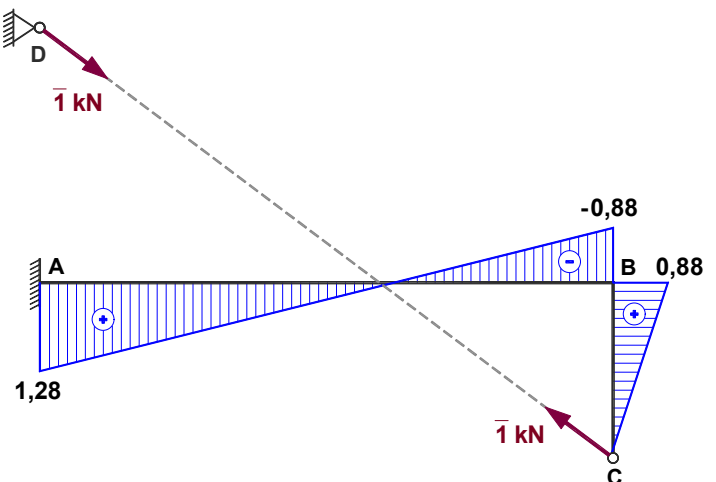
$$R_A = 1 \text{ kN} \quad \nwarrow$$

$$\begin{cases} \sum F_X = 0 \\ \sum F_Y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A - 0,8 = 0 \\ V_A + 0,6 = 0 \\ M_A + 0,8 \times 1,6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_A = 0,8 \text{ kN} \rightarrow \\ V_A = -0,6 \text{ kN} \downarrow \\ M_A = -1,28 \text{ kNm} \curvearrowright \end{cases}$$



Sistema S_1



M_1 - **Momento Fletor (kNm)**

• Determinação da incógnita hiperestática

MÉTODO DAS FORÇAS	
(desprezando a deformabilidade por esforço transversal e esforço axial das barras contínuas)	
Barras bi-articuladas	Barras contínuas
$\sum F_{\text{ext } S1} \times \Delta_R = \left[\sum N_1 \frac{N L}{E A} + \sum N_1 \alpha \Delta T L \right] + \left[\int \frac{M_1 \cdot M}{E I} dz + \int N_1 \cdot \alpha \cdot T_{\text{méd}} dz + \int M_1 \cdot \alpha \frac{T_{\text{inf}} - T_{\text{sup}}}{h} dz \right]$	

Como nas barras contínuas não estão aplicadas variações de temperatura:

MÉTODO DAS FORÇAS	
(desprezando a deformabilidade por esforço transversal e esforço axial das barras contínuas)	
Barras bi-articuladas	Barras contínuas
$\sum F_{\text{ext } S1} \times \Delta_R = \left[\sum N_1 \frac{N L}{E A} + \sum N_1 \alpha \Delta T L \right] + \left[\int \frac{M_1 \cdot M}{E I} dz \right]$	

Considerando:
$$\begin{cases} N = N_0 + \mathbf{X}_1 N_1 \\ M = M_0 + \mathbf{X}_1 M_1 \end{cases}$$

Barras bi-articuladas	Barras contínuas
$\sum F_{\text{ext } S1} \times \Delta_R = \left[\sum N_1 \frac{N_0 L}{E A} + \mathbf{X}_1 \sum N_1 \frac{N_1 L}{E A} + \sum N_1 \alpha \Delta T L \right] + \left[\int \frac{M_1 \cdot M_0}{E I} dz + \mathbf{X}_1 \int \frac{M_1 \cdot M_1}{E I} dz \right]$	

$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot \mathbf{X}_1 = 0$	
Barras bi-articuladas	Barras contínuas
$\delta_{10} = -\sum F_{\text{ext } S1} \times \Delta_R + \left[\sum N_1 \frac{N_0 L}{E A} + \sum N_1 \alpha \Delta T L \right] + \left[\int \frac{M_1 \cdot M_0}{E I} dz \right]$	
Barras bi-articuladas	Barras contínuas
$\delta_{11} = \left[\sum N_1 \frac{N_1 L}{E A} \right] + \left[\int \frac{M_1 \cdot M_1}{E I} dz \right]$	

• **Barra bi-articulada CD**

$$L = 4,5 \text{ m}$$

$$A = 9 \times 9 = 81 \text{ cm}^2 = 81 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$EA = 100 \times 10^6 \times 81 \times 10^{-4} = 8,1 \times 10^5 \text{ kPa.m}^2$$

$$\Delta T = -15 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$\alpha = 1,2 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$$

$$\sum N_1 \frac{N_0 L}{EA} = 0$$

$$\sum N_1 \alpha \Delta T L = 1 \times (-15) \times 1,2 \times 10^{-5} \times 4,5 = -81 \times 10^{-5}$$

$$\sum N_1 \frac{N_1 L}{EA} = 1 \times \frac{1 \times 4,5}{8,1 \times 10^5} = \frac{4,5}{8,1} \times 10^{-5}$$

• **Barras contínuas**

$$I = 5324 \text{ cm}^4 = 5,324 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$EI = 100 \times 10^6 \times 5,324 \times 10^{-5} = 5324 \text{ kPa.m}^4$$

Barra AB $\Rightarrow \int \frac{M_1 \cdot M_0}{EI} dz =$ $= \frac{1}{EI} \times \frac{3,6}{6} \times (2 \times 1,28 \times (-44,2) + 2 \times (-0,88) \times 24,2 + 1,28 \times 24,2 + (-0,88) \times (-44,2)) =$ $= -\frac{51,5232}{EI} = -\frac{51,5232}{5324}$ Barra BC $\Rightarrow \int \frac{M_1 \cdot M_0}{EI} dz = \frac{1}{EI} \times \frac{1}{3} \times (-24,2) \times 0,88 \times 1,1 = -\frac{23,4256}{3 \times EI} = -\frac{23,4256}{15\,972}$	$\int \frac{M_1 \cdot M_0}{EI} dz = -\frac{177,9952}{15\,972}$
Barra AB $\Rightarrow \int \frac{M_1 \cdot M_1}{EI} dz =$ $= \frac{1}{EI} \times \frac{3,6}{6} \times (2 \times 1,28 \times 1,28 + 2 \times (-0,88) \times (-0,88) + 1,28 \times (-0,88) + (-0,88) \times 1,28) =$ $= \frac{1,54368}{EI} = \frac{1,54368}{5324}$ Barra BC $\Rightarrow \int \frac{M_1 \cdot M_1}{EI} dz = \frac{1}{EI} \times \frac{1}{3} \times 0,88 \times 0,88 \times 1,1 = \frac{0,85184}{3 \times EI} = \frac{0,85184}{15\,972}$	$\int \frac{M_1 \cdot M_1}{EI} dz = \frac{5,48288}{15\,972}$

$$\delta_{10} = -\sum F_{\text{ext } S1} \times \Delta_R + \underbrace{\sum N_1 \frac{N_0 L}{EA}}_{\text{Barras bi-articuladas}} + \underbrace{\sum N_1 \alpha \Delta T L + \int \frac{M_1 \cdot M_0}{EI} dz}_{\text{Barras contínuas}}$$

$$\delta_{10} = -1,28 \times 1,8 \times 10^{-3} + 0 - 81 \times 10^{-5} - \frac{177,9952}{15\,972} = -1,4258 \times 10^{-2}$$

$$\delta_{11} = \underbrace{\sum N_1 \frac{N_1 L}{EA}}_{\text{Barras bi-articuladas}} + \underbrace{\int \frac{M_1 \cdot M_1}{EI} dz}_{\text{Barras contínuas}}$$

$$\delta_{11} = \frac{4,5}{8,1} \times 10^{-5} + \frac{5,48288}{15\,972} = 3,4884 \times 10^{-4}$$

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \Rightarrow -1,4258 \times 10^{-2} + 3,4884 \times 10^{-4} \times X_1 = 0 \Rightarrow X_1 = 40,87$$

O esforço instalado na barra CD é **40,87 kN (tração)**.

ALÍNEA b

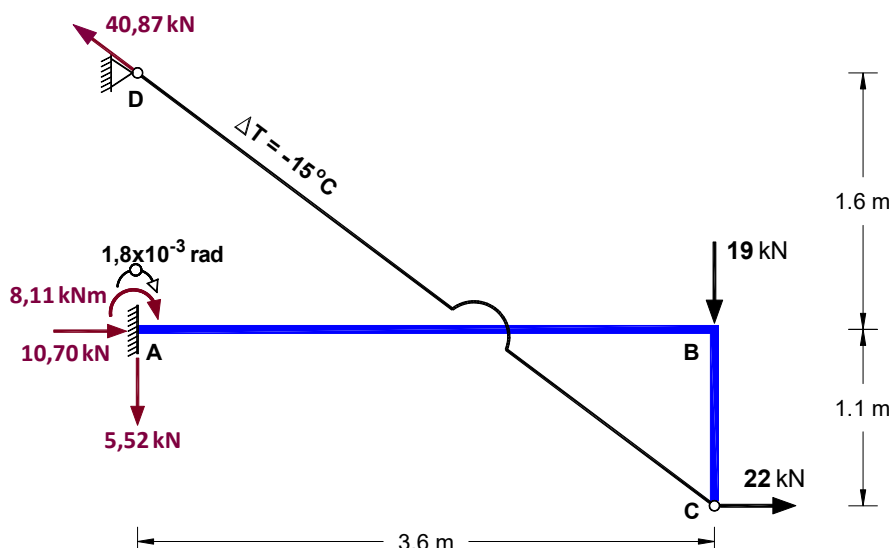
Reações nos apoios: $R = R^{S0} + X_1 \times R^{S1}$

$$H_A = -22 + 40,87 \times 0,8 = 10,70 \text{ kN} \rightarrow$$

$$V_A = 19 + 40,87 \times (-0,6) = -5,52 \text{ kN} \downarrow$$

$$M_A = -44,2 + 40,87 \times 1,28 = 8,11 \text{ kNm} \curvearrowright$$

$$R_D = X_1 = 40,87 \text{ kN} \nearrow$$



ALÍNEA c

Diagrama de momentos fletores nas barras ABC: $M = M^{S0} + X_1 \times M^{S1}$

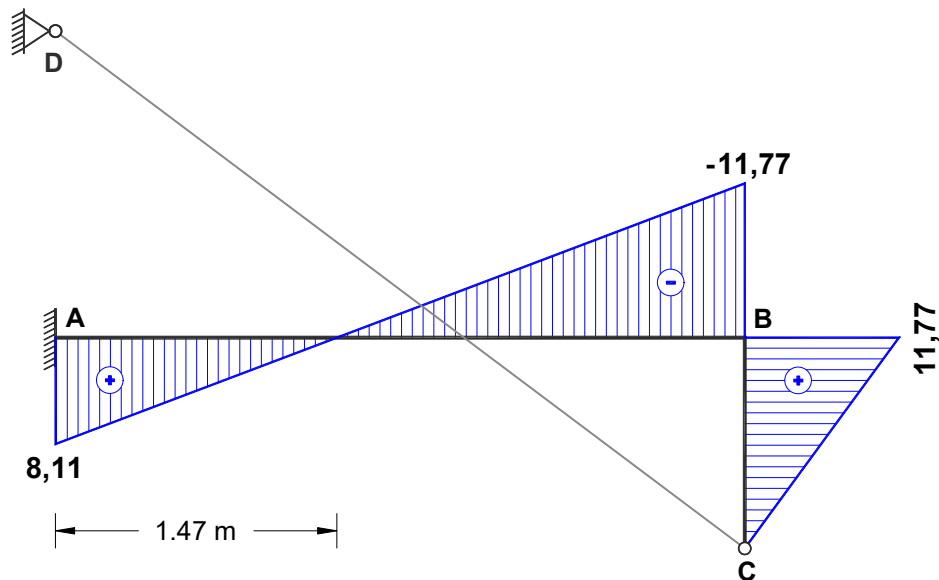
$$M_A = -44,2 + 40,87 \times 1,28 = 8,11 \text{ kNm}$$

$$M_B^{AB} = 24,2 + 40,87 \times (-0,88) = -11,77 \text{ kNm}$$

$$M_B^{BC} = -24,2 + 40,87 \times 0,88 = 11,77 \text{ kNm}$$

$$M_C = 0$$

Ponto de momento nulo na barra AB: $x = \frac{8,11 \times 3,6}{8,11 + 11,77} = 1,47 \text{ m}$



Momentos Fletores (kNm)