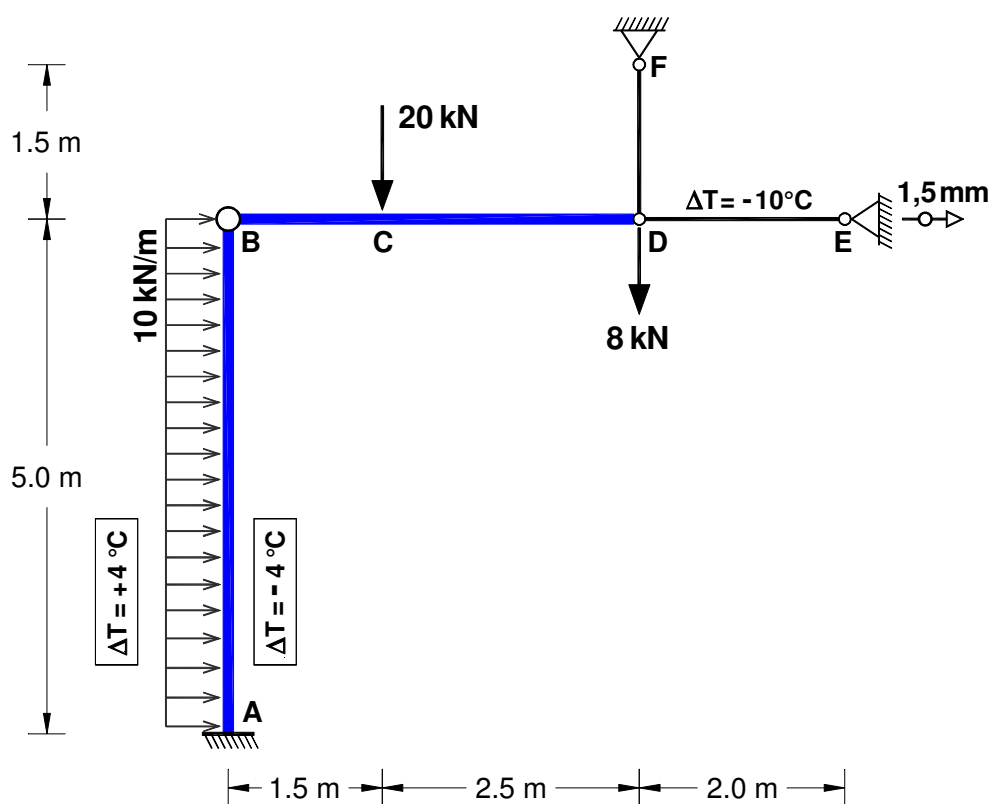


LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

TEORIA DE ESTRUTURAS



MÉTODO DAS FORÇAS

ESTRUTURA MISTA

EXAME DA ÉPOCA DE RECURSO – 12 / JULHO / 2022

ISABEL ALVIM TELES

EXERCÍCIO DO EXAME DA ÉPOCA DE RECURSO – 12/JULHO/2022

Considere a estrutura representada na *Figura 1*, composta por duas barras contínuas (AB e BCD) unidas entre si por uma rótula e duas barras bi-articuladas (DE e DF).

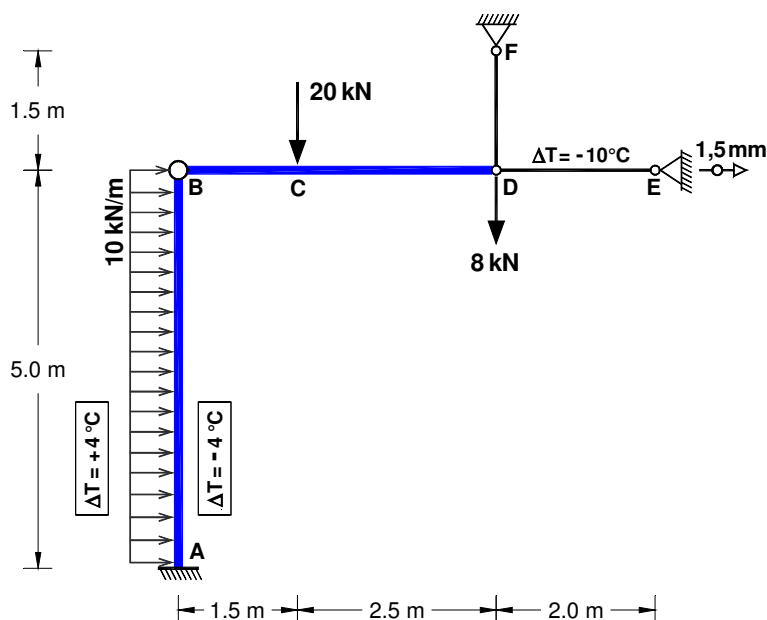


Figura 1

Características das secções transversais das barras	
Barras <u>AB</u> e <u>BCD</u> Secção retangular $\begin{cases} b=0,20\text{ m} \\ h=0,60\text{ m} \end{cases}$ $E I = 10^5 \text{ kPa} \cdot \text{m}^4$ Coef. dilatação térmica: $\alpha = 10^{-5} / ^\circ\text{C}$	Barras <u>DE</u> e <u>DF</u> Secção quadrada $b = h = 3 \text{ cm}$ $E A = 2 \times 10^5 \text{ kPa} \cdot \text{m}^2$ Coef. dilatação térmica: $\alpha = 10^{-5} / ^\circ\text{C}$

A secção transversal das barras que constituem a estrutura apresentam as características acima tabeladas.

Tal como representado na *Figura 1.1*, a barra AB está submetida a uma variação diferencial de temperatura ($\Delta T = +4 ^\circ\text{C}$ à esquerda e $\Delta T = -4 ^\circ\text{C}$ à direita) e a barra DE está submetida a uma variação uniforme de temperatura de $\Delta T = -10 ^\circ\text{C}$. Na estrutura estão ainda a atuar forças verticais de **20 kN** em **C** e **8 kN** em **D**, uma carga uniformemente distribuída de **10 kN/m** na barra AB e um assentamento horizontal do apoio **E** de **1,5 mm**.

Na resolução deste exercício aplique o **Método das Forças** desprezando a deformabilidade por esforço transversal e esforço axial das barras contínuas. Adote como sistema base a estrutura representada na *Figura 2* onde já se encontram calculadas as reações nos apoios.

Determine as reações no apoio **A** e o esforço axial instalado nas barras DE e DF da estrutura representada na *Figura 1*, explicitando claramente os sentidos das reações e o tipo de esforço das barras: compressão ou tração.

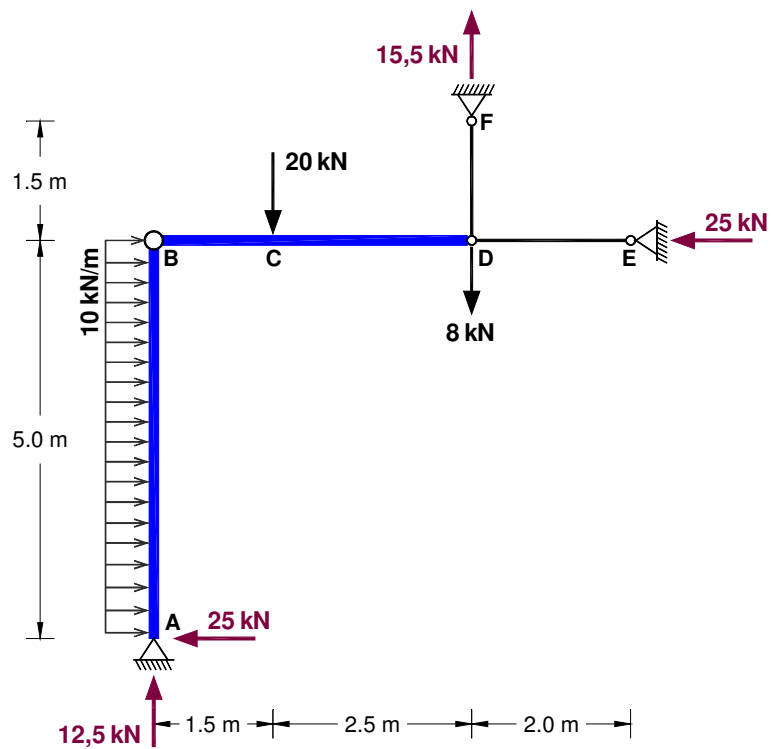


Figura 2

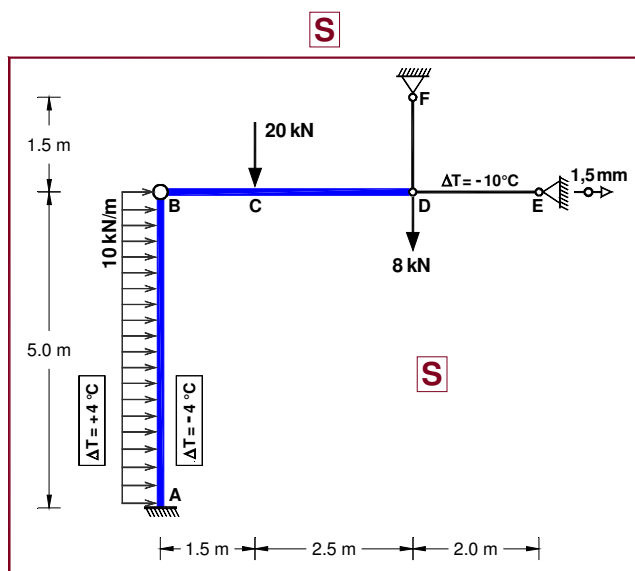
RESOLUÇÃO

Comparando a estrutura da *Figura 1* com o sistema base da *Figura 2*, conclui-se que a incógnita hiperestática corresponderá ao **momento de encastramento no apoio A**.

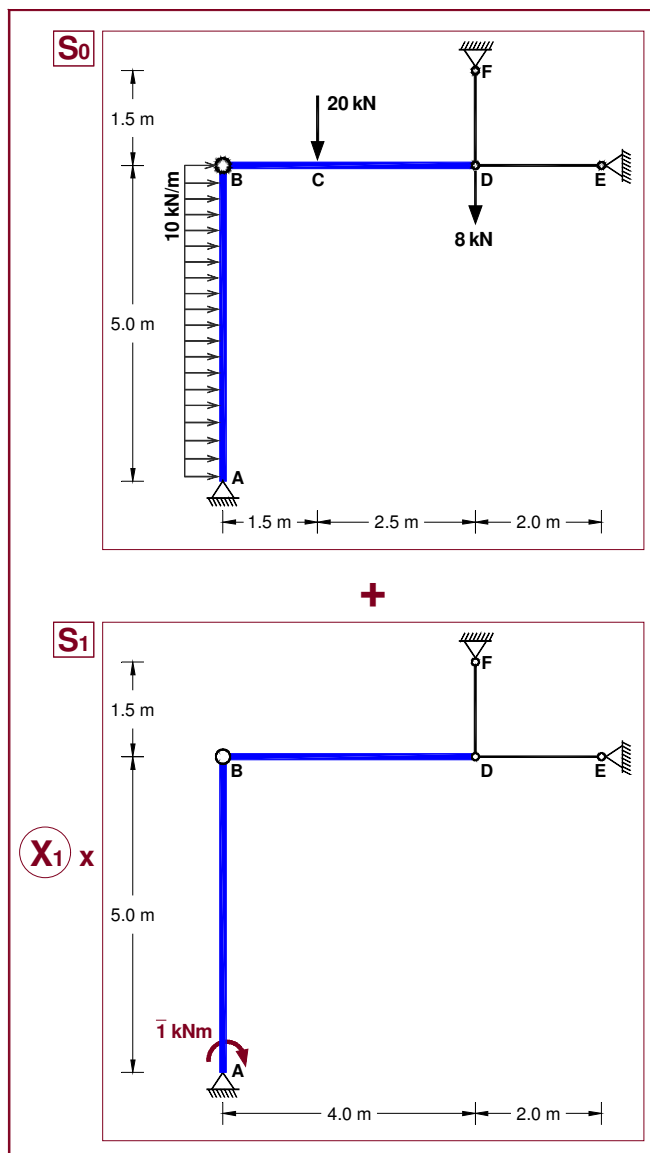
A estrutura (**S**) vai ser decomposta no sistema base **S₀** representado na *Figura 2* e no sistema **S₁** abaixo ilustrado.

$$S = S_0 + X_1 \times S_1$$

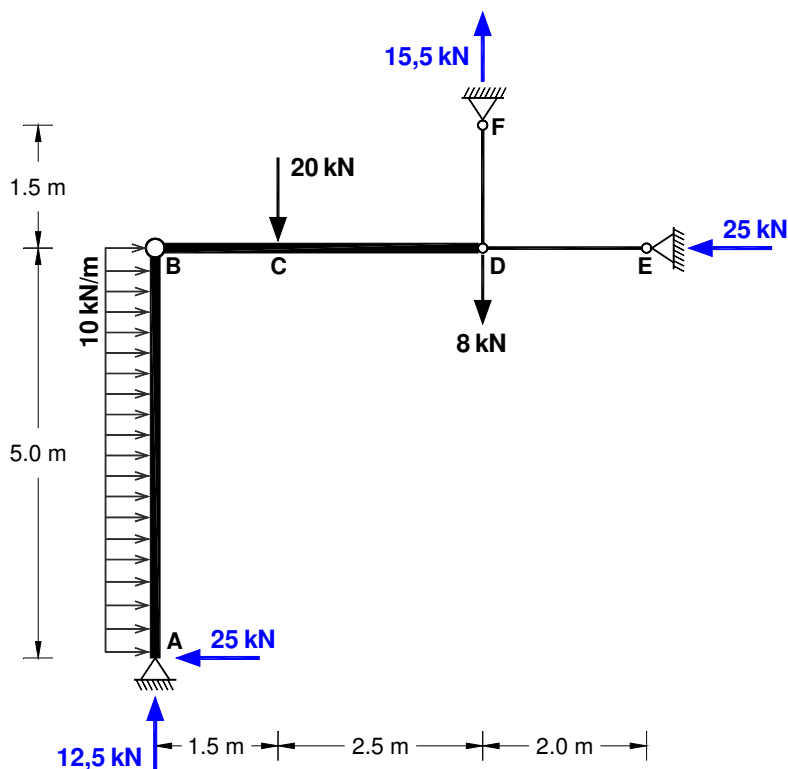
X₁ – incógnita hiperestática correspondente ao momento de encastramento no apoio **A**.



=



• **SISTEMA S_0**



Barra AB

$$M(z) = 25 Z - 5 Z^2$$

$$M_A = M(z=0) = 0$$

$$M_B = M(z=5) = 0$$

$$M_{\max} = M(z=2,5) = 31,25 \text{ kNm}$$

Barra BC

$$M(z) = 12,5 Z$$

$$M_B = M(z=0) = 0$$

$$M_C = M(z=1,5) = 18,75 \text{ kNm}$$

Barra CD

$$M(z) = 18,75 - 7,5 Z$$

$$M_C = M(z=0) = 18,75 \text{ kNm}$$

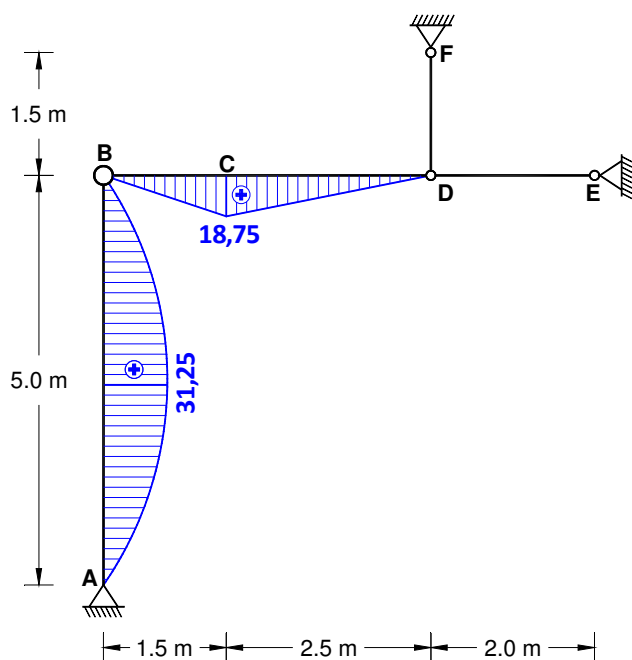
$$M_D = M(z=2,5) = 0$$

Barra DE:

Esforço axial $\Rightarrow N_{DE} = -25 \text{ kN}$ (compressão)

Barra DF:

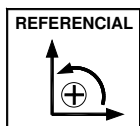
Esforço axial $\Rightarrow N_{DF} = 15,5 \text{ kN}$ (tração)



M_0 - Momento Fletor (kNm)

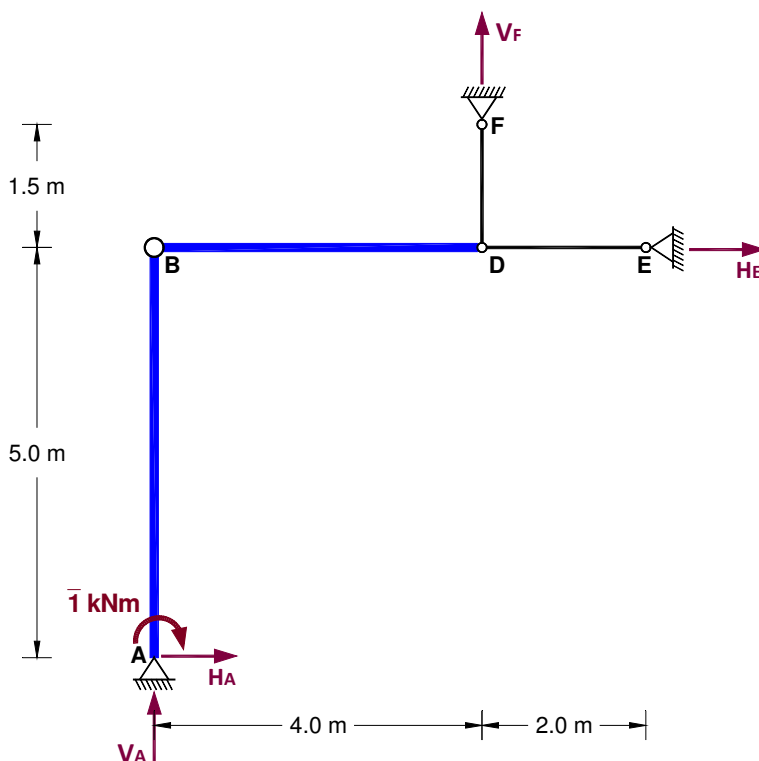
• **SISTEMA S_1**

Arco de 3 rótulas



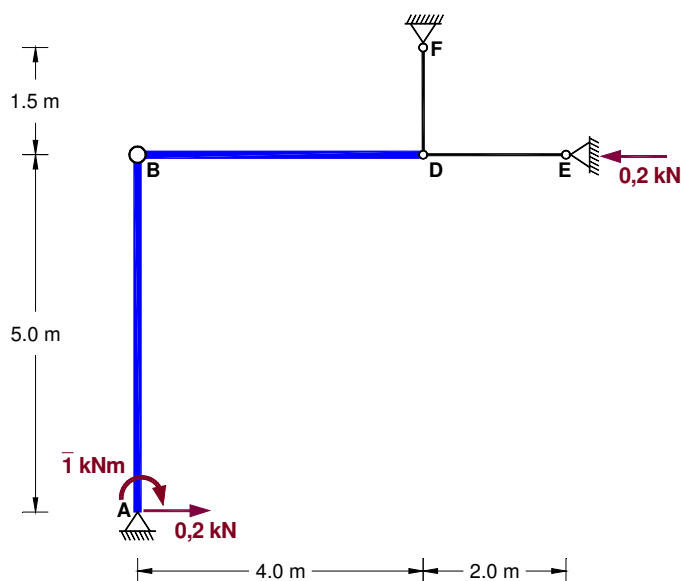
$$\begin{cases} \sum F_X = 0 \\ \sum F_Y = 0 \\ \sum M_A = 0 \\ \sum M_B^{AB} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A + H_E = 0 \\ V_A + V_F = 0 \\ 4V_F - 5H_A - 1 = 0 \\ 5H_A - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_A = 0,20 \text{ kN} \rightarrow \\ V_A = 0 \\ H_E = -0,20 \text{ kN} \leftarrow \\ V_F = 0 \end{cases}$$

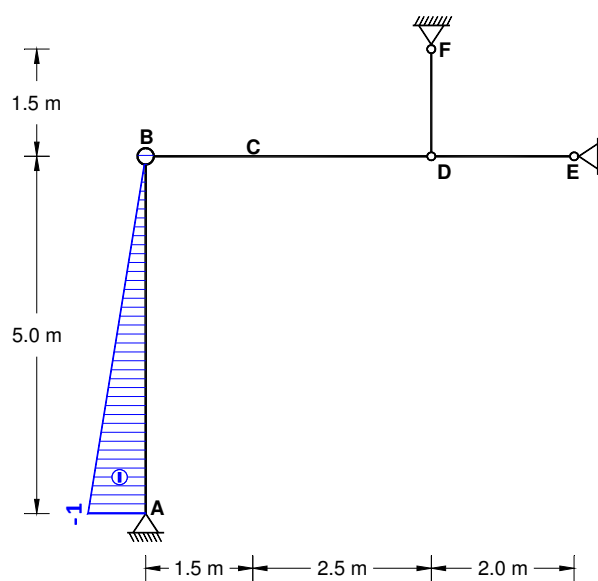


Barra DE: Esforço axial $\Rightarrow N_{DE} = -0,20 \text{ kN}$ (compressão)

Barra DF: Esforço axial $\Rightarrow N_{DF} = 0$



Sistema S_1



M_1 - Momento Fletor (kNm)

• Determinação da incógnita hiperestática

MÉTODO DAS FORÇAS

(desprezando a deformabilidade por esforço transversal e esforço axial das barras contínuas)

Barras bi-articuladas

Barras contínuas

$$\sum F_{\text{ext } S_1} \times \Delta_R = \sum N_1 \frac{N L}{E A} + \sum N_1 \alpha \Delta T L + \int \frac{M_1 \cdot M}{E I} dz + \int N_1 \cdot \alpha \cdot T_{\text{méd}} dz + \int M_1 \cdot \alpha \frac{T_{\text{inf}} - T_{\text{sup}}}{h} dz$$

Como na barra contínua **AB** $T_{\text{méd}} = 0$:

MÉTODO DAS FORÇAS

(desprezando a deformabilidade por esforço transversal e esforço axial das barras contínuas)

Barras bi-articuladas

Barras contínuas

$$\sum F_{\text{ext } S_1} \times \Delta_R = \sum N_1 \frac{N L}{E A} + \sum N_1 \alpha \Delta T L + \int \frac{M_1 \cdot M}{E I} dz + \int M_1 \cdot \alpha \frac{T_{\text{inf}} - T_{\text{sup}}}{h} dz$$

Considerando:
$$\begin{cases} N = N_0 + \mathbf{X}_1 N_1 \\ M = M_0 + \mathbf{X}_1 M_1 \end{cases}$$

Barras bi-articuladas

$$\sum F_{\text{ext } S1} \times \Delta_R = \left[\sum N_1 \frac{N_0 L}{EA} + \mathbf{X_1} \sum N_1 \frac{N_1 L}{EA} + \sum N_1 \alpha \Delta T L \right] +$$

$$+ \left[\int \frac{M_1 \cdot M_0}{EI} dz + \mathbf{X_1} \int \frac{M_1 \cdot M_1}{EI} dz + \int M_1 \cdot \alpha \frac{T_{\text{inf}} - T_{\text{sup}}}{h} dz \right]$$

Barras contínuas

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot \mathbf{X_1} = 0$$

Barras bi-articuladas

Barras contínuas

$$\delta_{10} = -\sum F_{\text{ext } S1} \times \Delta_R + \left[\sum N_1 \frac{N_0 L}{EA} + \sum N_1 \alpha \Delta T L \right] + \left[\int \frac{M_1 \cdot M_0}{EI} dz + \int M_1 \cdot \alpha \frac{T_{\text{inf}} - T_{\text{sup}}}{h} dz \right]$$

**Barras
bi-articuladas**

**Barras
contínuas**

$$\delta_{11} = \left[\sum N_1 \frac{N_1 L}{EA} \right] + \left[\int \frac{M_1 \cdot M_1}{EI} dz \right]$$

• **Barra bi-articulada DE**

$$L = 2 \text{ m}$$

$$A = 3 \times 3 = 9 \text{ cm}^2 = 9 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$EA = 2 \times 10^5 \text{ kPa} \cdot \text{m}^2$$

$$\Delta T = -10 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$\alpha = 10^{-5} / ^\circ\text{C}$$

$$\text{Sistema } S_0: N_0^{\text{DE}} = -25 \text{ kN (compressão)}$$

$$\text{Sistema } S_1: N_1^{\text{DE}} = -0,20 \text{ kN (compressão)}$$

• **Barra bi-articulada DF**

$$L = 1,5 \text{ m}$$

$$A = 3 \times 3 = 9 \text{ cm}^2 = 9 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$EA = 2 \times 10^5 \text{ kPa} \cdot \text{m}^2$$

$$\Delta T = 0$$

$$\alpha = 10^{-5} / ^\circ\text{C}$$

$$\text{Sistema } S_0: N_0^{\text{DF}} = 15,5 \text{ kN (tração)}$$

$$\text{Sistema } S_1: N_1^{\text{DF}} = 0$$

$$\sum N_1 \frac{N_0 L}{EA} = \frac{-25 \times (-0,2) \times 2}{2 \times 10^5} = 5 \times 10^{-5}$$

$$\sum N_1 \alpha \Delta T L = -0,2 \times (-10) \times 10^{-5} \times 2 = 4 \times 10^{-5}$$

$$\sum N_1 \frac{N_1 L}{EA} = \frac{-0,2 \times (-0,2) \times 2}{2 \times 10^5} = 0,04 \times 10^{-5}$$

• **Barras contínuas**

$$b = 0,32 \text{ m}; h = 0,60 \text{ m}$$

$$EI = 10^5 \text{ kPa.m}^4$$

$\text{Barra AB} \Rightarrow \int \frac{M_1 \cdot M_0}{EI} dz = \frac{1}{EI} \times \frac{1}{3} \times 31,25 \times 1 \times 5 = \frac{156,25}{3} \times 10^{-5}$ $\text{Barra BC} \Rightarrow \int \frac{M_1 \cdot M_0}{EI} dz = 0$ $\text{Barra CD} \Rightarrow \int \frac{M_1 \cdot M_0}{EI} dz = 0$	$\int \frac{M_1 \cdot M_0}{EI} dz = \frac{156,25}{3} \times 10^{-5}$
---	--

$\text{Barra AB} \Rightarrow \int \frac{M_1 \cdot M_1}{EI} dz = \frac{1}{EI} \times \frac{1 \times 1 \times 5}{3} = \frac{5}{3} \times 10^{-5}$ $\text{Barra BC} \Rightarrow \int \frac{M_1 \cdot M_1}{EI} dz = 0$ $\text{Barra CD} \Rightarrow \int \frac{M_1 \cdot M_1}{EI} dz = 0$	$\int \frac{M_1 \cdot M_1}{EI} dz = \frac{5}{3} \times 10^{-5}$
---	---

$$\text{Barra AB} \Rightarrow \int M_1 \cdot \alpha \frac{T_{\text{inf}} - T_{\text{sup}}}{h} dz = \frac{1 \times 5}{2} \times 10^{-5} \times \frac{-4 - 4}{0,60} dz = -\frac{100}{3} \times 10^{-5}$$

Barras bi-articuladas	Barras contínuas
$\delta_{10} = -\sum F_{\text{ext}} S_1 \times \Delta_R + \sum N_1 \frac{N_0 L}{EA} + \sum N_1 \alpha \Delta T L$	$+ \int \frac{M_1 \cdot M_0}{EI} dz + \int M_1 \cdot \alpha \frac{T_{\text{inf}} - T_{\text{sup}}}{h} dz$
$\delta_{10} = -(-0,2) \times 1,5 \times 10^{-3} + 5 \times 10^{-5} + 4 \times 10^{-5} + \frac{156,25}{3} \times 10^{-5} - \frac{100}{3} \times 10^{-5} = 57,75 \times 10^{-5}$	

Barras bi-articuladas	Barras contínuas
$\delta_{11} = \sum N_1 \frac{N_1 L}{EA}$	$+ \int \frac{M_1 \cdot M_1}{EI} dz$
$\delta_{11} = 0,04 \times 10^{-5} + \frac{5}{3} \times 10^{-5} = \frac{5,12}{3} \times 10^{-5}$	

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \Rightarrow 57,75 \times 10^{-5} + \frac{5,12}{3} \times 10^{-5} \times X_1 = 0 \Rightarrow X_1 = -33,84$$

Reações no apoio A: $R = R^{S0} + X_1 \times R^{S1}$

$$H_A = -25 + (-33,84) \times 0,2 = -31,77 \text{ kN} \leftarrow$$

$$V_A = 12,5 + (-33,84) \times 0 = 12,5 \text{ kN} \uparrow$$

$$M_A = X_1 = -33,84 \text{ kNm} \curvearrowright$$

Esforço axial da barra DE: $N_{DE} = N_{DE}^{S0} + X_1 \times N_{DE}^{S1}$

$$N_{DE} = -25 + (-33,84) \times (-0,2) = -18,23 \text{ kN} \text{ (compressão)}$$

Esforço axial da barra DF: $N_{DF} = N_{DF}^{S0} + X_1 \times N_{DF}^{S1}$

$$N_{DF} = 15,5 + (-33,84) \times 0 = 15,5 \text{ kN} \text{ (tração)}$$

