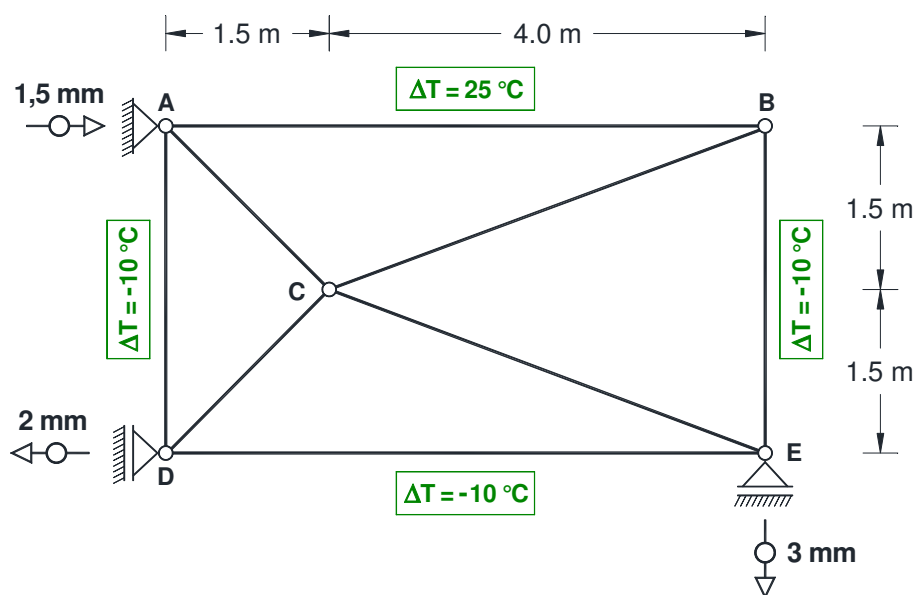


LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

TEORIA DE ESTRUTURAS

MÉTODO DAS FORÇAS



EXERCÍCIO DO EXAME DE ÉPOCA DE RECURSO – 2014/2015

SISTEMA ARTICULADO PLANO (SAP) HIPERESTÁTICO

ISABEL ALVIM TELES

EXERCÍCIO DO EXAME DE ÉPOCA RECURSO - 2014/2015

Considere a estrutura articulada plana representada na **Figura 1**, constituída por barras com **8 cm²** de secção transversal.

O material constituinte das barras apresenta as seguintes características: **E = 200 GPa**;

$$\alpha = 1,5 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}.$$

A estrutura está submetida às ações ilustradas na **Figura 1**, que incluem:

- variação de temperatura $\Delta T = 25 \text{ } ^\circ\text{C}$ na barra **AB**;
- variação de temperatura $\Delta T = -10 \text{ } ^\circ\text{C}$ nas barras **AD**, **BE** e **DE**;
- assentamentos de apoio.

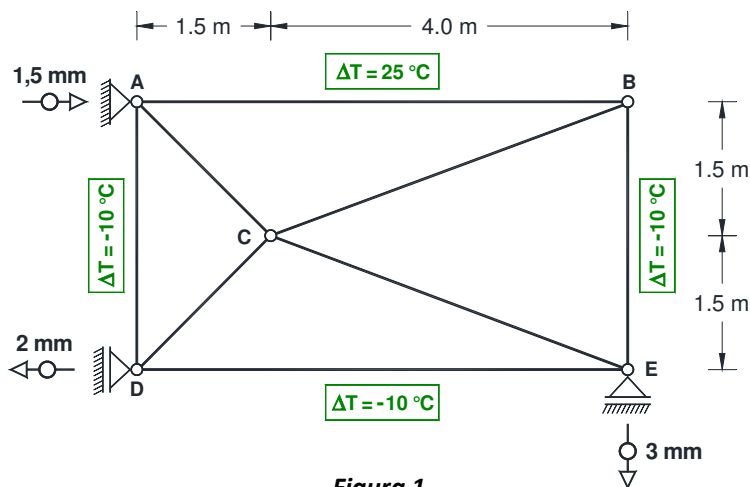
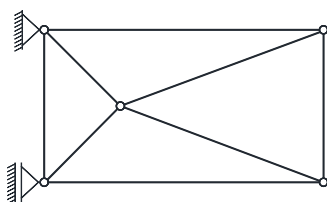


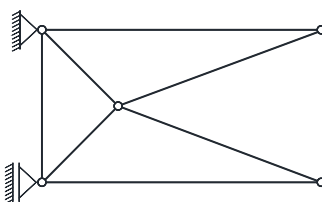
Figura 1

Responda às alíneas seguintes recorrendo ao **Método das Forças** e apresentando todos os cálculos intermédios realizados.

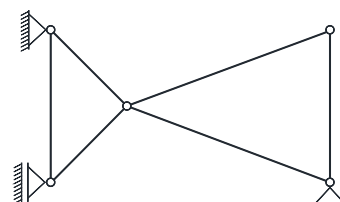
- a)** Das **configurações 1 a 6** abaixo representadas, indique justificando convenientemente, quais poderão constituir sistema base para a estrutura da **Figura 1**;



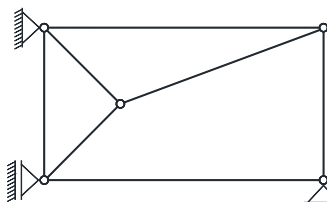
CONFIGURAÇÃO 1



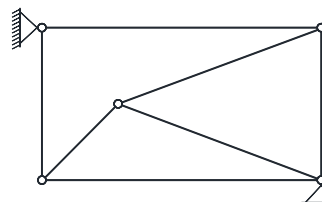
CONFIGURAÇÃO 2



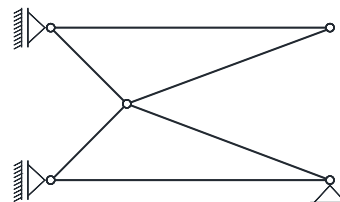
CONFIGURAÇÃO 3



CONFIGURAÇÃO 4



CONFIGURAÇÃO 5



CONFIGURAÇÃO 6

- b)** De todas as configurações da alínea anterior que poderão constituir sistema base para a estrutura, considere a de menor numeração para responder à presente alínea.
Determine as reações nos apoios da estrutura da **Figura 1** e caracterize os esforços nas barras **AB** e **CD**.

RESOLUÇÃO

Alínea a)

$$\text{Grau de hiperestaticidade} = \mathbf{b} + \mathbf{R} - 2\mathbf{n} \quad \text{em que:} \quad \left| \begin{array}{l} \mathbf{b} \text{ (número de barras)} = 8 \\ \mathbf{R} \text{ (número de reações)} = 4 \\ \mathbf{n} \text{ (número de nós)} = 5 \end{array} \right.$$

$$\text{Grau de hiperestaticidade} = 8 + 4 - 2 \times 5 = 12 - 10 = 2$$

A estrutura é **hiperestática de grau 2**.

Configuração 1: A estrutura é 1 vez hiperestática por condições internas, logo não pode constituir sistema base.

Configuração 2: Foram retirados um apoio e uma barra, logo a estrutura ficou isostática. Pode constituir sistema base.

Configuração 3: A estrutura é um arco de 3 rótulas, logo uma estrutura isostática. Pode constituir sistema base.

Configuração 4: A estrutura é 1 vez hiperestática por condições externas, logo não pode constituir sistema base.

Configuração 5: Foram retirados um apoio e uma barra, logo a estrutura ficou isostática. Pode constituir sistema base.

Configuração 6: Para constituir um arco de 3 rótulas, a estrutura deveria ter 4 ligações ao exterior. Como só tem 3, a estrutura é 1 vez hipoestática por condições externas. Não pode constituir sistema base.

CONCLUSÃO: As configurações que poderão constituir sistema base da estrutura em estudo são:

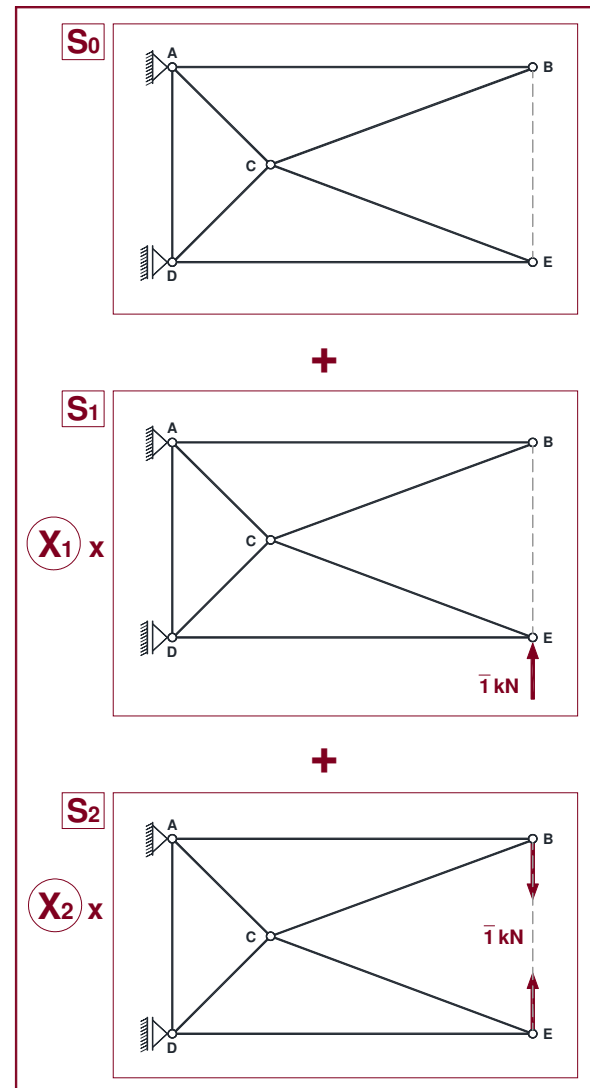
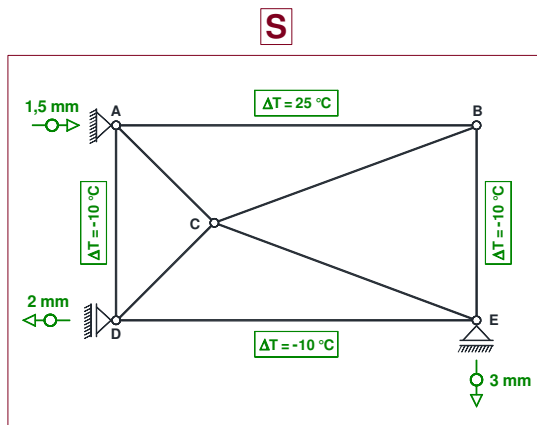
- **configuração 2**
- **configuração 3**
- **configuração 5.**

Alínea b)

Na resolução desta alínea será considerada a configuração de menor numeração, ou seja, a **configuração 2**.

Como foram retirados o **apoio em E** e a **barra BE**, a incógnita hiperestática **X₁** corresponderá à reação vertical do apoio do nó **E** e a incógnita hiperestática **X₂** corresponderá ao esforço axial da barra **BE**.

$$S = S_0 + X_1 \times S_1 + X_2 \times S_2$$



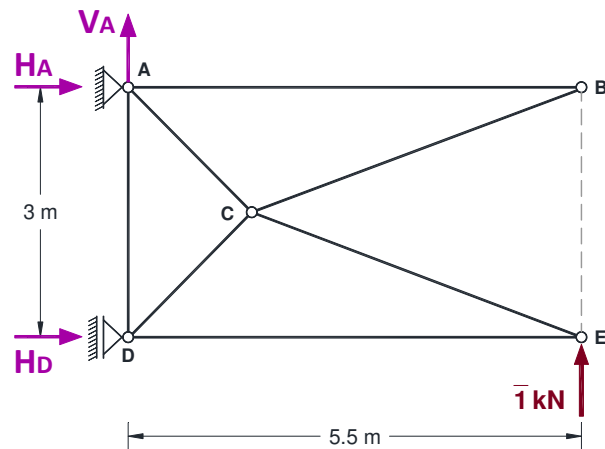
• Cálculo da estrutura S₀

A estrutura S₀ está descarregada, pelo que as reações e os esforços nas barras serão nulos.

• **Cálculo da estrutura S₁**

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \Rightarrow H_A + H_D = 0 \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow V_A + 1 = 0 \\ \sum M_A = 0 \Rightarrow 3H_D + 5,5 \times 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_A = \frac{5,5}{3} \text{ kN} \rightarrow \\ V_A = -1 \text{ kN} \downarrow \\ H_D = -\frac{5,5}{3} \text{ kN} \leftarrow \end{cases}$$



$$\alpha = \arctg \frac{1,5}{4} \Rightarrow \alpha = 20,556^\circ \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0,9363 \\ \sin \alpha = 0,3511 \end{cases}$$

$$\beta = 45^\circ \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Nó B $\begin{cases} N_{AB} = 0 \text{ (barra descarregada)} \\ N_{BC} = 0 \text{ (barra descarregada)} \end{cases}$

Nó E

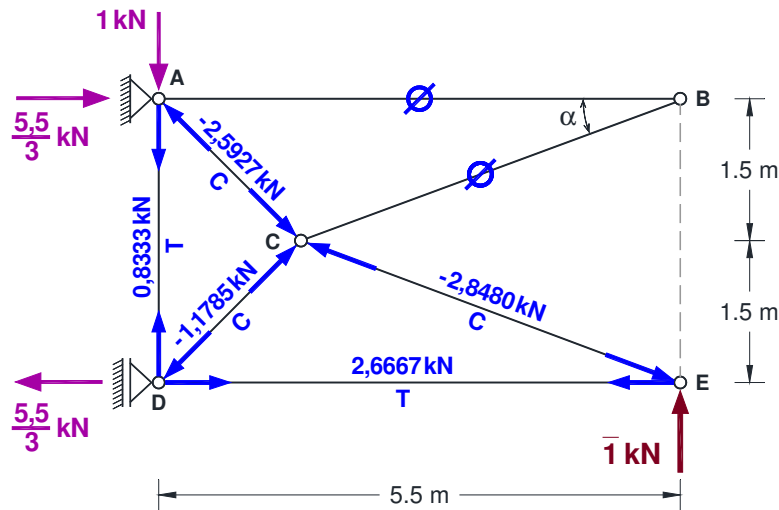
$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -N_{DE} - N_{CE} \cos \alpha = 0 \\ N_{CE} \sin \alpha + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_{DE} = 2,6667 \text{ kN (tração)} \\ N_{CE} = -2,8480 \text{ kN (comp.)} \end{cases}$$

Nó A

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5,5}{3} + N_{AC} \cos \beta = 0 \\ -N_{AC} \sin \beta - N_{AD} - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_{AC} = -2,5927 \text{ kN (comp.)} \\ N_{AD} = 0,8333 \text{ kN (tração)} \end{cases}$$

Nó D

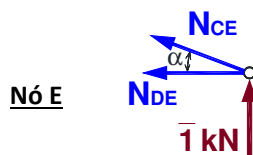
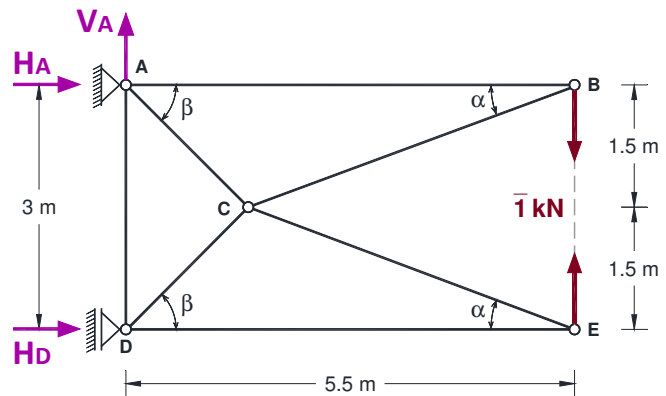
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 0,8333 + N_{CD} \sin \beta = 0 \Rightarrow N_{CD} = -1,1785 \text{ kN (comp.)}$$



• **Cálculo da estrutura S_2**

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \Rightarrow H_A + H_D = 0 \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow V_A = 0 \\ \sum M_A = 0 \Rightarrow 3H_D = 0 \end{cases}$$

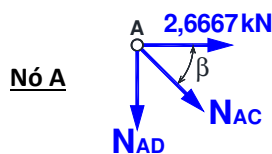
$$\begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = 0 \\ H_D = 0 \end{cases}$$



Nó E

(igual ao nó E do sistema S_1) $\begin{cases} N_{DE} = 2,6667 \text{ kN (tração)} \\ N_{CE} = -2,8480 \text{ kN (comp.)} \end{cases}$

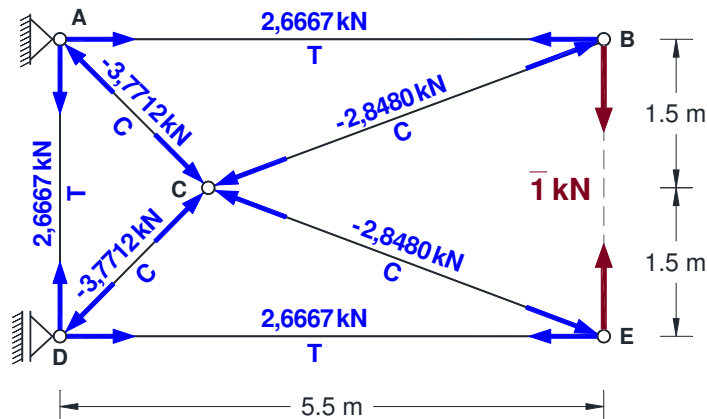
Nó B (simétrico do nó E) $\Rightarrow \begin{cases} N_{AB} = N_{DE} = 2,6667 \text{ kN (tração)} \\ N_{BC} = N_{CE} = -2,8480 \text{ kN (comp.)} \end{cases}$



Nó A

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2,6667 + N_{AC} \cos \beta = 0 \\ -N_{AC} \sin \beta - N_{AD} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_{AC} = -3,7712 \text{ kN (comp.)} \\ N_{AD} = 2,6667 \text{ kN (tração)} \end{cases}$$

Nó D (simétrico do nó A) $\Rightarrow N_{CD} = N_{AC} = -3,7712 \text{ kN (comp.)}$



MÉTODO DAS FORÇAS

$$\begin{cases} \sum F_{\text{ext}}^{S_1} \times \Delta_R = \sum N_1 \frac{NL}{EA} + \sum N_1 \alpha \Delta T L \\ \sum F_{\text{ext}}^{S_2} \times \Delta_R = \sum N_2 \frac{NL}{EA} + \sum N_2 \alpha \Delta T L \end{cases}$$

Considerando:

$$N = N_0 + X_1 N_1 + X_2 N_2 \Rightarrow \begin{cases} \sum F_{\text{ext}}^{S_1} \times \Delta_R = \sum N_1 \frac{N_0 L}{EA} + \sum N_1 \frac{N_1 L}{EA} \cdot X_1 + \sum N_1 \frac{N_2 L}{EA} \cdot X_2 + \sum N_1 \alpha \Delta T L \\ \sum F_{\text{ext}}^{S_2} \times \Delta_R = \sum N_2 \frac{N_0 L}{EA} + \sum N_2 \frac{N_1 L}{EA} \cdot X_1 + \sum N_2 \frac{N_2 L}{EA} \cdot X_2 + \sum N_2 \alpha \Delta T L \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 = 0 \end{cases}$$

sendo:

$\delta_{10} = \sum N_1 \frac{N_0 L}{EA} + \sum N_1 \alpha \Delta T L - \sum F_{\text{ext}}^{S_1} \times \Delta_R$	$\delta_{11} = \sum N_1 \frac{N_1 L}{EA}$	$\delta_{12} = \sum N_1 \frac{N_2 L}{EA}$
$\delta_{20} = \sum N_2 \frac{N_0 L}{EA} + \sum N_2 \alpha \Delta T L - \sum F_{\text{ext}}^{S_2} \times \Delta_R$	$\delta_{21} = \sum N_2 \frac{N_1 L}{EA}$	$\delta_{22} = \sum N_2 \frac{N_2 L}{EA}$

$$EA = 200 \times 10^6 \times 8 \times 10^{-4} = 16 \times 10^4 \text{ kPa} \times \text{m}^2$$

$$\alpha = 1,5 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$$

BARRAS	L (m)	N ₀ (kN)	N ₁ (kN)	N ₂ (kN)	N ₁ $\frac{N_0 L}{EA}$	N ₂ $\frac{N_0 L}{EA}$	N ₁ $\frac{N_1 L}{EA}$	N ₁ $\frac{N_2 L}{EA}$	N ₂ $\frac{N_2 L}{EA}$	N ₁ · α · ΔT · L	N ₂ · α · ΔT · L
AB	5.5	0	0	2,6667	0	0	0	0	2,4445 x10 ⁻⁴	0	5,500 x10 ⁻³
AC	√4.5	0	-2,5927	-3,7712	0	0	8,9123 x10 ⁻⁵	1,2963 x10 ⁻⁴	1,8856 x10 ⁻⁴	-	-
AD	3	0	0,8333	2,6667	0	0	1,3020 x10 ⁻⁵	4,1666 x10 ⁻⁵	1,3334 x10 ⁻⁴	-3,750 x10 ⁻⁴	-1,200 x10 ⁻³
BC	√18.75	0	0	-2,8480	0	0	0	0	2,1657 x10 ⁻⁴	-	-
BE	3	-	-	1,0000	0	0	-	0	1,8750 x10 ⁻⁵	0	-4,500 x10 ⁻⁴
CD	√4.5	0	-1,1785	-3,7712	0	0	1,8414 x10 ⁻⁵	5,8924 x10 ⁻⁵	1,8856 x10 ⁻⁴	-	-
CE	√18.75	0	-2,8480	-2,8480	0	0	2,1657 x10 ⁻⁴	2,1657 x10 ⁻⁴	2,1657 x10 ⁻⁴	-	-
DE	5.5	0	2,6667	2,6667	0	0	2,4445 x10 ⁻⁴	2,4445 x10 ⁻⁴	2,4445 x10 ⁻⁴	-2,200 x10 ⁻³	-2,200 x10 ⁻³
Σ					0	0	5,8157 x10 ⁻⁴	6,9124 x10 ⁻⁴	1,4512 x10 ⁻³	-2,575 x10 ⁻³	1,650 x10 ⁻³

$$\delta_{10} = \sum N_1 \frac{N_0 L}{EA} + \sum N_1 \alpha \Delta T L - \sum F_{\text{ext}}^{S1} \times \Delta_R =$$

$$= 0 - 2,575 \times 10^{-3} - \left(\frac{5,5}{3} \times 0,0015 + \frac{5,5}{3} \times 0,002 - 1 \times 0,003 \right) = -5,9917 \times 10^{-3}$$

$$\delta_{20} = \sum N_2 \frac{N_0 L}{EA} + \sum N_2 \alpha \Delta T L - \sum F_{\text{ext}}^{S2} \times \Delta_R =$$

$$= 0 + 1,650 \times 10^{-3} - 0 = 1,650 \times 10^{-3}$$

$$\delta_{11} = \sum N_1 \frac{N_1 L}{EA} = 5,8157 \times 10^{-4}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum N_1 \frac{N_2 L}{EA} = \sum N_2 \frac{N_1 L}{EA} = 6,9124 \times 10^{-4}$$

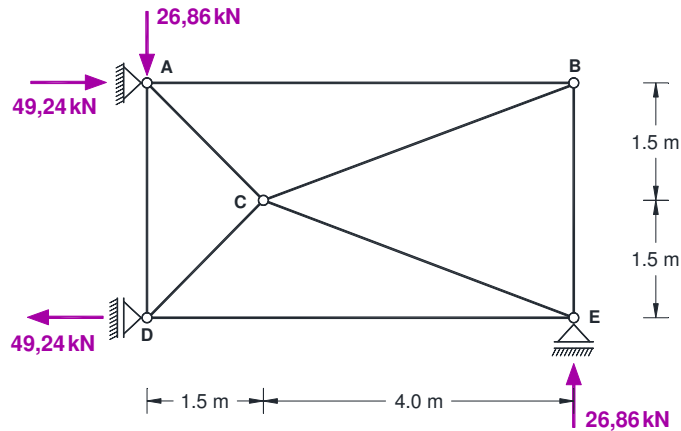
$$\delta_{22} = \sum N_2 \frac{N_2 L}{EA} = 1,4512 \times 10^{-3}$$

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11} \cdot \mathbf{X}_1 + \delta_{12} \cdot \mathbf{X}_2 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21} \cdot \mathbf{X}_1 + \delta_{22} \cdot \mathbf{X}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5,9917 \times 10^{-3} + 5,8157 \times 10^{-4} \times \mathbf{X}_1 + 6,9124 \times 10^{-4} \times \mathbf{X}_2 = 0 \\ 1,650 \times 10^{-3} + 6,9124 \times 10^{-4} \times \mathbf{X}_1 + 1,4512 \times 10^{-3} \times \mathbf{X}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{X}_1 = 26,86 \\ \mathbf{X}_2 = -13,93 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_A = (H_A)^{S_0} + \mathbf{X}_1 \cdot (H_A)^{S_1} + \mathbf{X}_2 \cdot (H_A)^{S_2} \\ V_A = (V_A)^{S_0} + \mathbf{X}_1 \cdot (V_A)^{S_1} + \mathbf{X}_2 \cdot (V_A)^{S_2} \\ H_D = (H_D)^{S_0} + \mathbf{X}_1 \cdot (H_D)^{S_1} + \mathbf{X}_2 \cdot (H_D)^{S_2} \\ V_E = (V_E)^{S_0} + \mathbf{X}_1 \cdot (V_E)^{S_1} + \mathbf{X}_2 \cdot (V_E)^{S_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = 0 + 26,86 \times \frac{5,5}{3} + (-13,93) \times 0 \\ V_A = 0 + 26,86 \times (-1) + (-13,93) \times 0 \\ H_D = 0 + 26,86 \times \left(-\frac{5,5}{3}\right) + (-13,93) \times 0 \\ V_E = 0 + 26,86 \times 1 + (-13,93) \times 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_A = 49,24 \text{ kN} \rightarrow \\ V_A = -26,86 \text{ kN} \downarrow \\ H_D = -49,24 \text{ kN} \leftarrow \\ V_E = 26,86 \text{ kN} \uparrow \end{cases}$$



• Esforços nas barras AB e CD

$$N_{AB} = (N_{AB})^{S_0} + \mathbf{X}_1 \cdot (N_{AB})^{S_1} + \mathbf{X}_2 \cdot (N_{AB})^{S_2}$$

$$N_{AB} = 0 + 26,86 \times 0 - 13,93 \times 2,6667 = -37,15 \text{ kN} \quad (\text{compressão})$$

$$N_{CD} = (N_{CD})^{S_0} + \mathbf{X}_1 \cdot (N_{CD})^{S_1} + \mathbf{X}_2 \cdot (N_{CD})^{S_2}$$

$$N_{CD} = 0 + 26,86 \times (-1,1785) - 13,93 \times (-3,7712) = 20,88 \text{ kN} \quad (\text{tração})$$