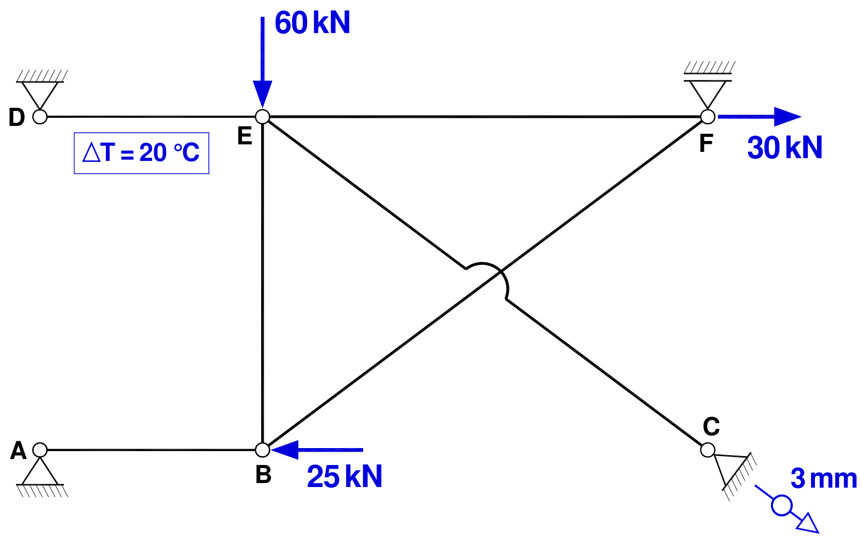
LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

TEORIA DE ESTRUTURAS

MÉTODO DAS FORÇAS



EXERCÍCIO DO EXAME DE ÉPOCA ESPECIAL – 2013/2014

SISTEMA ARTICULADO PLANO (SAP) HIPERESTÁTICO

ISABEL ALVIM TELES

EXERCÍCIO DO EXAME DE ÉPOCA ESPECIAL (2013/2014)

Considere a estrutura articulada representada na figura, constituída por perfis metálicos com **4 cm²** de secção transversal.

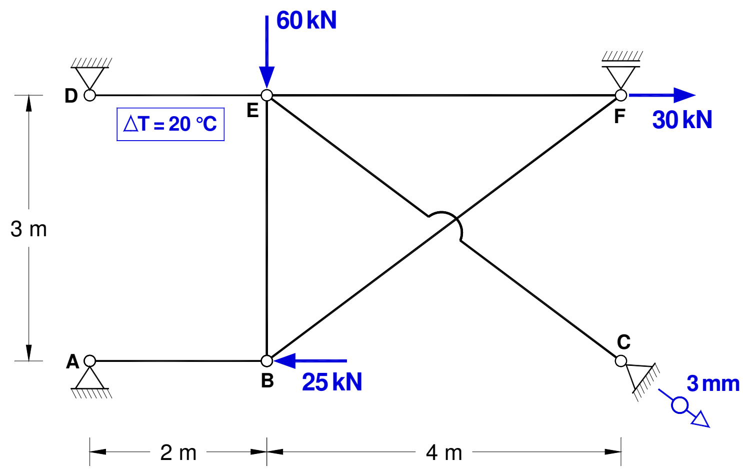
O aço constituinte dos perfis apresenta as seguintes características: **E = 200 GPa**; $\alpha = 1{,}2\text{x}10^{-5}\ ^{o}C^{-1}$.

A estrutura está submetida às seguintes acções ilustradas na figura:

– forças concentradas nos nós **B**, **E** e **F**;

– assentamento de **3 mm** do apoio **C** na direcção da barra **CE**;

– variação de temperatura de **20ºC** da barra **DE**.



Recorrendo ao **Método das Forças** e apresentando todos os cálculos intermédios efectuados, determine as reacções em todos os apoios (indique a sua grandeza, direcção e sentido) e caracterize os esforços instalados nas barras **BF** e **EF**.

RESOLUÇÃO

A estrutura é hiperestática de grau 1.

Serão apresentadas duas opções de resolução do exercício, adoptando dois sistema base (**S_0**) diferentes:

- **resolução 1**: supressão do apoio simples do nó **F**;
- **resolução 2**: supressão da barra **CE**.

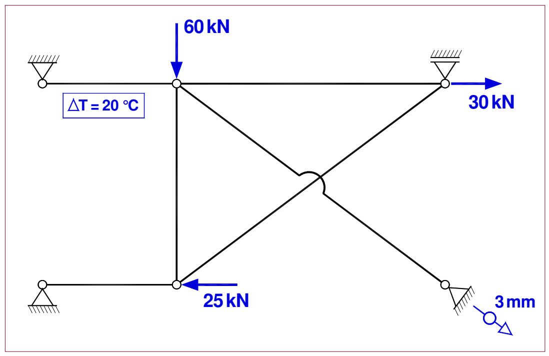
RESOLUÇÃO 1

Na **resolução 1** será adoptado para sistema base (**S_0**) a estrutura isostática que se obtém suprimindo o apoio simples do nó **F**.

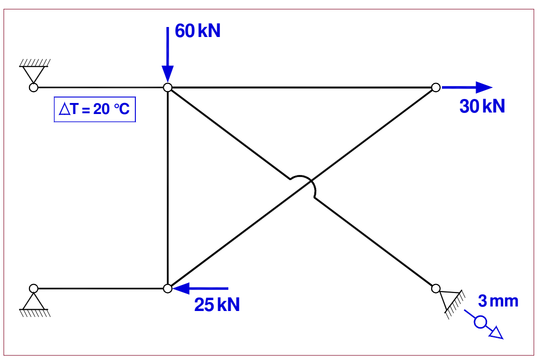
A incógnita hiperestática **X_1** corresponderá então à reacção vertical do apoio do nó **F**.

$$\boxed{S = S_0 + X_1 \times S_1}$$

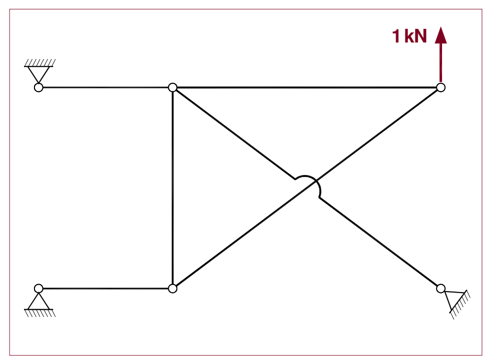
S



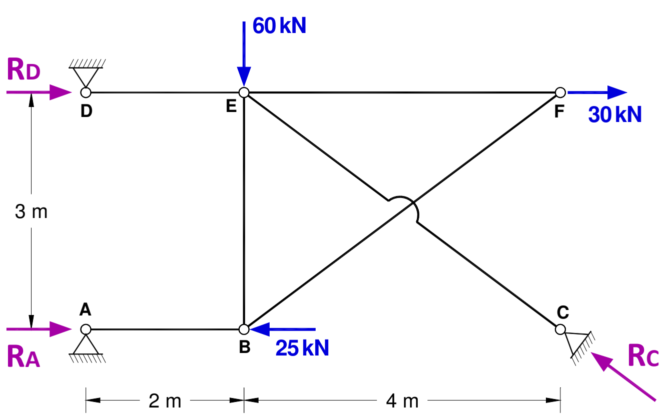
S0 **S1**



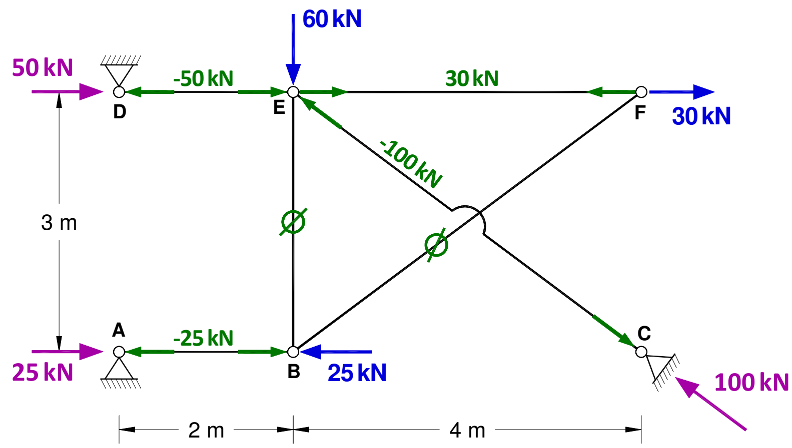
$+ X_1 \times$



• Cálculo da estrutura S_0



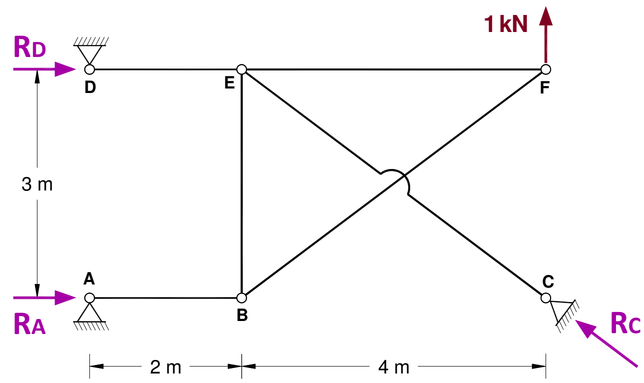
$$\begin{cases} \sum M_C = 0 \Rightarrow 3R_D - 60\times4 + 30\times3 = 0 \\ \sum M_E = 0 \Rightarrow 3R_A = 3\times25 \\ \sum F_X = 0 \Rightarrow R_A + R_D + 30 - 25 - 0{,}8\,R_C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_D = 50 \text{ kN } \rightarrow \\ R_A = 25 \text{ kN } \rightarrow \\ R_C = 100 \text{ kN } \nwarrow \end{cases}$$

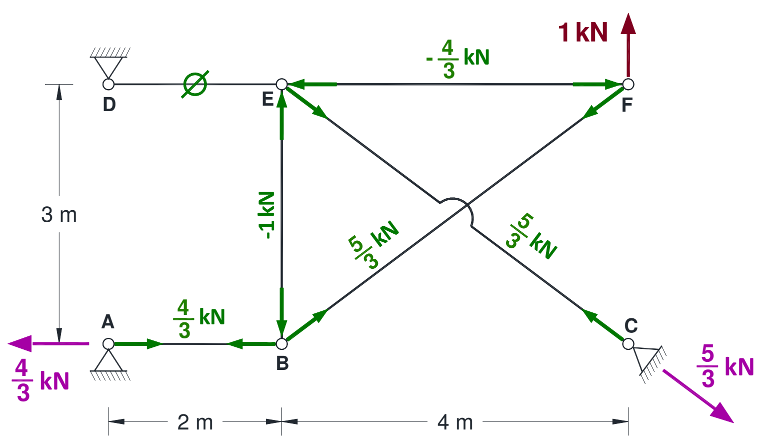


- **Cálculo da estrutura S₁**

$$\begin{cases} \sum M_C = 0 \;\Rightarrow\; 3R_D = 0 \\ \sum M_E = 0 \;\Rightarrow\; 3R_A + 1\times 4 = 0 \\ \sum F_X = 0 \;\Rightarrow\; R_A - 0{,}8\,R_C = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_D = 0 \\ R_A = -\frac{4}{3}\text{ kN} \;\leftarrow \\ R_C = -\frac{5}{3}\text{ kN} \;\searrow \end{cases}$$





MÉTODO DAS FORÇAS	$\Sigma F_{ext}^{S_1} \times \Delta_R = \Sigma N_1 \frac{N_0 L}{EA} + \Sigma N_1 \alpha \Delta T L + \left(\Sigma N_1 \frac{N_1 L}{EA}\right) . \mathbf{X_1}$

Ou seja: $\boxed{\delta_{10} + \delta_{11} . \mathbf{X_1} = 0}$ sendo:

$$\delta_{10} = \Sigma N_1 \frac{N_0 L}{EA} + \Sigma N_1 \alpha \Delta T L - \Sigma F_{ext}^{S_1} \times \Delta_R$$

$$\delta_{11} = \Sigma N_1 \frac{N_1 L}{EA}$$

E A = 200 x 10^6 x 4 x 10^{-4} = 8 x 10^4 kPa x m

Barra **DE**: $\alpha\,\Delta T\,L = 1{,}2 \times 10^{-5} \times 20 \times 2 = 4{,}8 \times 10^{-4}$

BARRAS	L (m)	E A (kPa x m²)	N_0 (kN)	N_1 (kN)	$N_1 \frac{N_0 L}{E A}$	$N_1\ \alpha\ \Delta T\ L$	$N_1 \frac{N_1 L}{E A}$
AB	2	8 x 10^4	–25	$\frac{4}{3}$	–8,333 x 10^{-4}	–	4,444 x 10^{-5}
DE	2	8 x 10^4	–50	0	0	0	0
EF	4	8 x 10^4	30	$-\frac{4}{3}$	–20 x 10^{-4}	–	8,889 x 10^{-5}
BE	3	8 x 10^4	0	–1	0	–	3,750 x 10^{-5}
BF	5	8 x 10^4	0	$\frac{5}{3}$	0	–	17,361 x 10^{-5}
CE	5	8 x 10^4	–100	$\frac{5}{3}$	–104,167x 10^{-4}	–	17,361 x 10^{-5}
Σ					–132,5 x 10^{-4}	0	51,805 x 10^{-5}

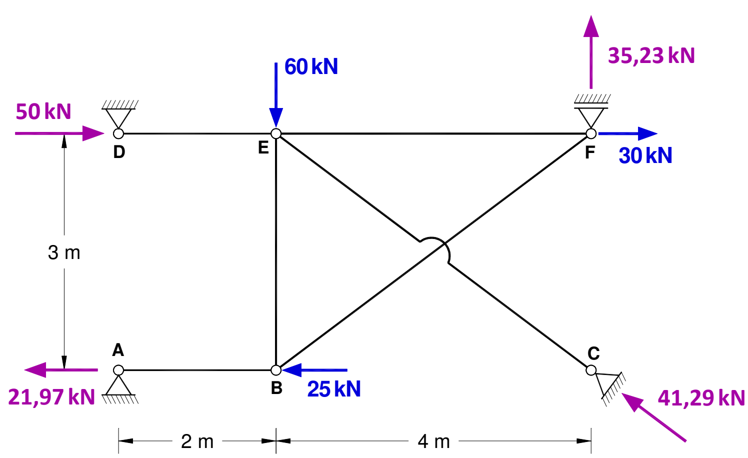
$$\delta_{10} = \Sigma\, N_1 \frac{N_0 L}{E A} + \Sigma\, N_1\, \alpha\, \Delta T\, L - \Sigma F_{ext}^{S_1} \times \Delta_R = -132{,}5 \times 10^{-4} + 0 - \frac{5}{3} \times 0{,}003 = -1{,}825 \times 10^{-2}$$

$$\delta_{11} = \Sigma\, N_1 \frac{N_1 L}{E A} = 51{,}805 \times 10^{-5}$$

$$\delta_{10} + \delta_{11}.\mathbf{X_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad -1{,}825 \times 10^{-2} + 51{,}805 \times 10^{-5}.\mathbf{X_1} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{X_1} = 35{,}228 \quad \Rightarrow \quad R_F = 35{,}228\ \text{kNm}\ \uparrow$$

$$\begin{cases} R_A = (R_A)^{S_0} + \mathbf{X_1}.(R_A)^{S_1} \\ R_C = (R_C)^{S_0} + \mathbf{X_1}.(R_C)^{S_1} \\ R_D = (R_D)^{S_0} + \mathbf{X_1}.(R_D)^{S_1} \\ R_F = 35{,}228\ \text{kN} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_A = 25 + 35{,}228 \times \left(-\frac{4}{3}\right) \\ R_C = 100 + 35{,}228 \times \left(-\frac{5}{3}\right) \\ R_D = 50 + 35{,}228 \times 0 \\ R_F = 35{,}228\ \text{kN} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_A = -21{,}97\ \text{kN}\ \leftarrow \\ R_C = 41{,}29\ \text{kN}\ \nwarrow \\ R_D = 50\ \text{kN}\ \rightarrow \\ R_F = 35{,}23\ \text{kN}\ \uparrow \end{cases}$$



• **Esforços nas barras BF e EF**

$$N_{BF} = (N_{BF})^{S_0} + \mathbf{X_1}.(N_{BF})^{S_1} \quad \Rightarrow \quad N_{BF} = 0 + 35{,}228 \times \frac{5}{3} = 58{,}71\,kN \ \text{(tracção)}$$

$$N_{EF} = (N_{EF})^{S_0} + \mathbf{X_1}.(N_{EF})^{S_1} \quad \Rightarrow \quad N_{EF} = 30 + 35{,}228 \times \left(-\frac{4}{3}\right) = -16{,}97\,kN \ \text{(compressão)}$$

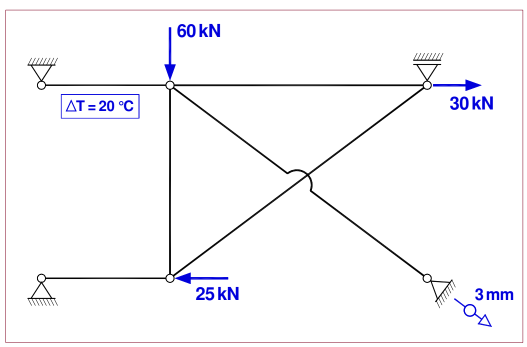
RESOLUÇÃO 2

Na **resolução 2** será adoptado para sistema base (**S_0**) a estrutura isostática que se obtém suprimindo a barra **CE**.

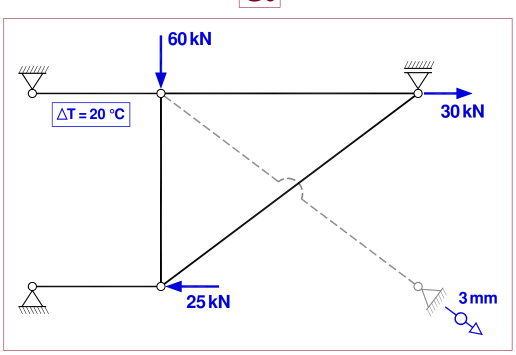
A incógnita hiperestática **X_1** corresponderá então ao esforço axial instalado na barra **CE** (**N_{CE}**).

$$\boxed{\mathbf{S = S_0 + X_1 \times S_1}}$$

S

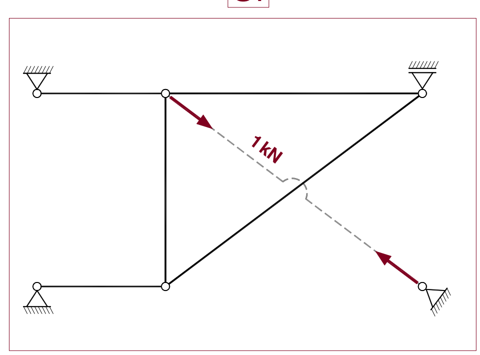


S0



+ X1 x

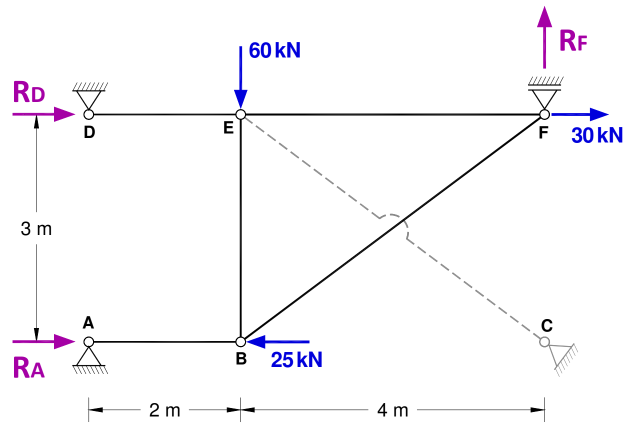
S1

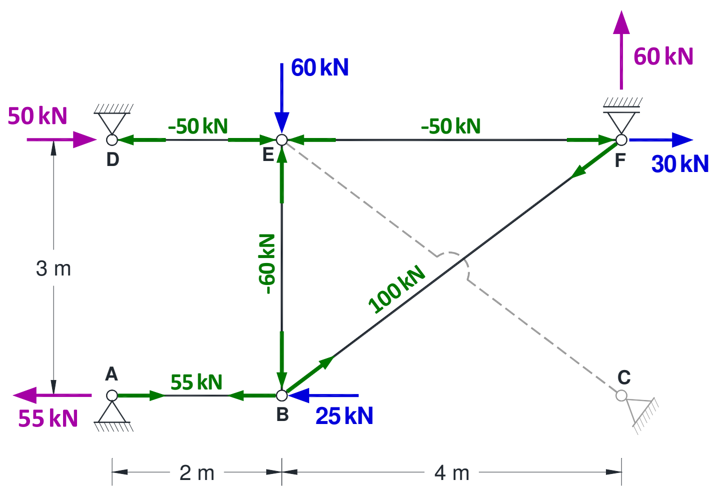


• Cálculo da estrutura S_0

$$\begin{cases} \sum F_X = 0 \;\Rightarrow\; R_D + R_A - 25 + 30 = 0 \\ \sum F_Y = 0 \;\Rightarrow\; R_F = 60 \\ \sum M_D = 0 \Rightarrow 3R_A + 6R_F - 3\times 25 - 2\times 60 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_A = -55 \text{ kN} \leftarrow \\ R_D = 50 \text{ kN} \rightarrow \\ R_F = 60 \text{ kN} \uparrow \end{cases}$$



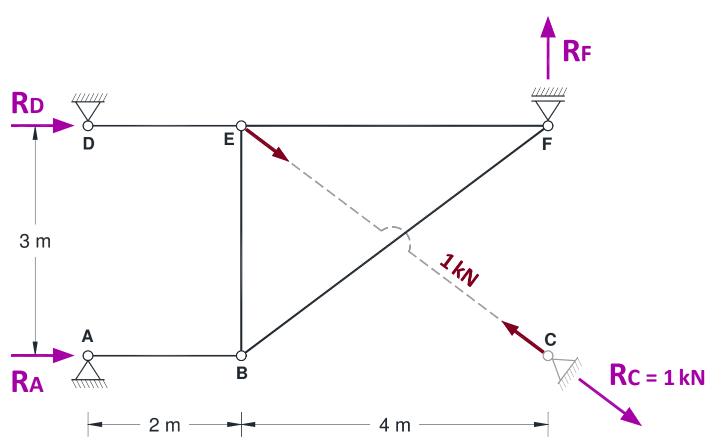


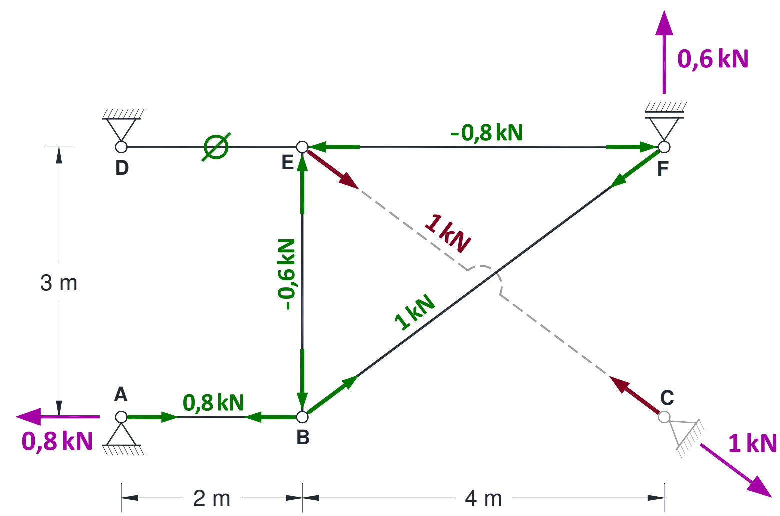
• Cálculo da estrutura S_1

Equilíbrio do nó **C** $\Rightarrow$ $R_c = 1$ kN ↘

$$\begin{cases} \sum F_X = 0 \;\Rightarrow\; R_D + R_A + 0{,}8 = 0 \\ \sum F_Y = 0 \;\Rightarrow\; \Rightarrow\; R_F = 0{,}6 \\ \sum M_E = 0 \;\Rightarrow\; 3R_A + 4R_F = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_A = -0{,}8 \text{ kN} \leftarrow \\ R_D = 0 \\ R_F = 0{,}6 \text{ kN} \uparrow \end{cases}$$





MÉTODO DAS FORÇAS	$\Sigma F_{ext}^{S_1} \times \Delta_R = \Sigma N_1 \frac{N_0 L}{E A} + \Sigma N_1 \alpha \Delta T L + \left(\Sigma N_1 \frac{N_1 L}{E A}\right) . \mathbf{X_1}$

Ou seja: $\boxed{\delta_{10} + \delta_{11} . \mathbf{X_1} = 0}$ sendo:

$$\delta_{10} = \Sigma N_1 \frac{N_0 L}{E A} + \Sigma N_1 \alpha \Delta T L - \Sigma F_{ext}^{S_1} \times \Delta_R$$

$$\delta_{11} = \Sigma N_1 \frac{N_1 L}{E A}$$

$E A = 200 \times 10^6 \times 4 \times 10^{-4} = 8 \times 10^4$ kPa x m

Barra **DE**: $\alpha \Delta T L = 1{,}2 \times 10^{-5} \times 20 \times 2 = 4{,}8 \times 10^{-4}$

BARRAS	L (m)	E A (kPa x m^2)	N_0 (kN)	N_1 (kN)	$N_1 \frac{N_0 L}{E A}$	$N_1 \alpha \Delta T L$	$N_1 \frac{N_1 L}{E A}$
AB	2	8×10^4	55	0,8	11×10^{-4}	–	$1{,}6 \times 10^{-5}$
DE	2	8×10^4	–50	0	0	0	0
EF	4	8×10^4	–50	–0,8	20×10^{-4}	–	$3{,}2 \times 10^{-5}$
BE	3	8×10^4	–60	–0,6	$13{,}5 \times 10^{-4}$	–	$1{,}35 \times 10^{-5}$
BF	5	8×10^4	100	1	$62{,}5 \times 10^{-4}$	–	$6{,}25 \times 10^{-5}$
CE	5	8×10^4	–	**1**	–	–	$6{,}25 \times 10^{-5}$
Σ					107×10^{-4}	0	$18{,}65 \times 10^{-5}$

$$\delta_{10} = \Sigma\, N_1 \frac{N_0\, L}{E\,A} + \Sigma\, N_1\, \alpha\, \Delta T\, L - \Sigma F_{ext}^{S_1} \times \Delta_R = 107 \times 10^{-4} + 0 - 1 \times 0{,}003 = 7{,}7 \times 10^{-3}$$

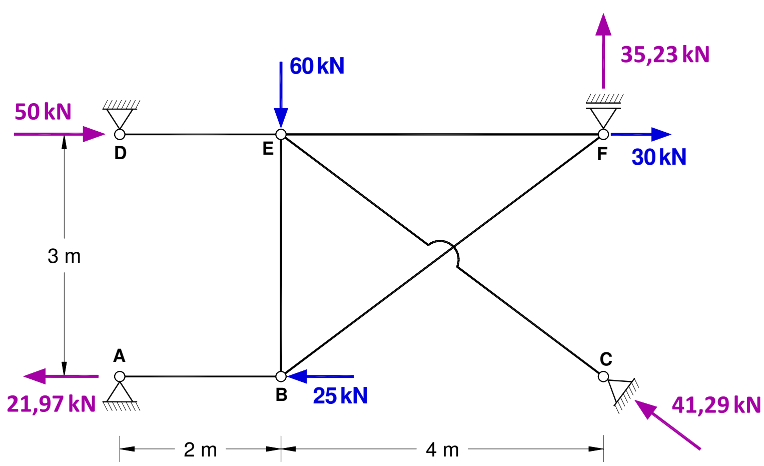
$$\delta_{11} = \Sigma\, N_1 \frac{N_1\, L}{E\,A} = 18{,}65 \times 10^{-5}$$

$$\delta_{10} + \delta_{11}.\mathbf{X_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad 7{,}7 \times 10^{-3} + 18{,}65 \times 10^{-5}.\mathbf{X_1} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{X_1} = -41{,}287$$

$$\Rightarrow \quad N_{\mathbf{CE}} = -41{,}29 \text{ kN} \quad \text{(compressão)}$$

$$\begin{cases} R_A = (R_A)^{S_0} + \mathbf{X_1}.(R_A)^{S_1} \\ R_C = (R_C)^{S_0} + \mathbf{X_1}.(R_C)^{S_1} \\ R_D = (R_D)^{S_0} + \mathbf{X_1}.(R_D)^{S_1} \\ R_F = (R_F)^{S_0} + \mathbf{X_1}.(R_F)^{S_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_A = -55 - 41{,}287 \times (-0{,}8) \\ R_C = 0 - 41{,}287 \times 1 \\ R_D = 50 - 41{,}287 \times 0 \\ R_F = 60 - 41{,}287 \times 0{,}6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_A = -21{,}97 \text{ kN} \leftarrow \\ R_C = -41{,}29 \text{ kN} \nwarrow \\ R_D = 50 \text{ kN} \rightarrow \\ R_F = 35{,}23 \text{ kN} \uparrow \end{cases}$$



• Esforços nas barras BF e EF

$$N_{BF} = (N_{BF})^{S_0} + \mathbf{X_1}.(N_{BF})^{S_1} \quad \Rightarrow \quad N_{BF} = 100 + (-41{,}287) \times 1 = 58{,}71 \text{kN} \quad \text{(tracção)}$$

$$N_{EF} = (N_{EF})^{S_0} + \mathbf{X_1}.(N_{EF})^{S_1} \quad \Rightarrow \quad N_{EF} = -50 + (-41{,}287) \times (-0{,}8) = -16{,}97 \text{kN} \quad \text{(compressão)}$$