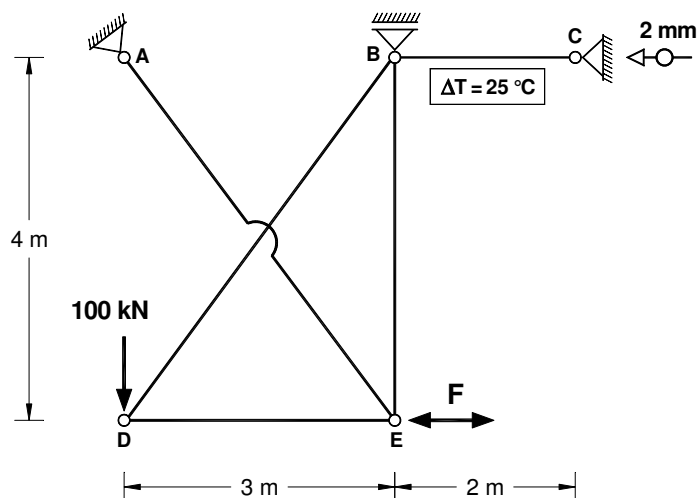


LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

TEORIA DE ESTRUTURAS

TEOREMA DOS TRABALHOS VIRTUAIS



EXERCÍCIO BASEADO NA AVALIAÇÃO INTERCALAR – 27/ABRIL/2015

SISTEMA ARTICULADO PLANO (SAP) ISOSTÁTICO

ISABEL ALVIM TELES

EXERCÍCIO ADAPTADO DA AVALIAÇÃO INTERCALAR DE 27/ABRIL/2015

Considere a estrutura articulada representada nas Figuras 1 e 2, constituída por perfis metálicos com 4 cm^2 de secção transversal.

O material constituinte das barras apresenta as seguintes características:

$$E = 200 \text{ GPa}; \alpha = 1,5 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}.$$

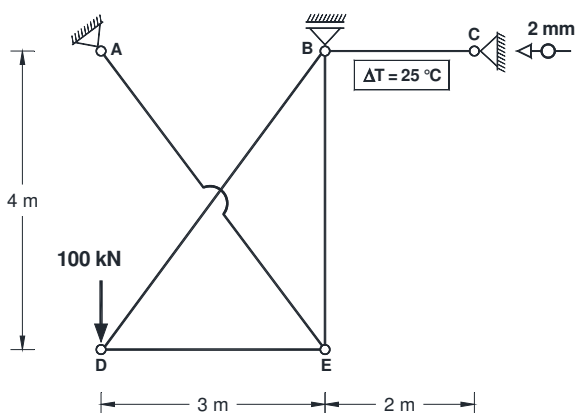


Figura 1

Resolva as alíneas seguintes aplicando o **Teorema dos Trabalhos Virtuais** e apresentando todos os cálculos intermédios.

- a) Determine a rotação **barra BE** considerando que a estrutura está submetida às seguintes acções ilustradas na Figura 1:
- força vertical de **100 kN** no nó D;
 - assentamento horizontal de **2 mm** do apoio C;
 - variação de temperatura de **25 °C** da barra BC.

- b) Considere agora que a estrutura, para além das acções descritas na alínea a), está submetida a uma **força horizontal F** aplicada no nó E (ver Figura 2).

Determine a grandeza e sentido da **força horizontal F** a aplicar no nó E, para que a barra BE apresente uma rotação de $\theta = 3 \times 10^{-3} \text{ rad}$ no sentido anti-horário (ver Figura 3).

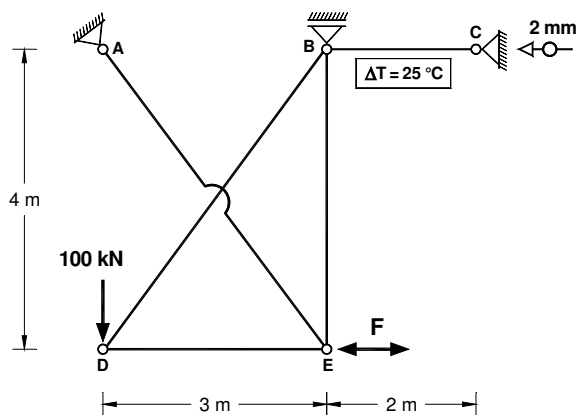
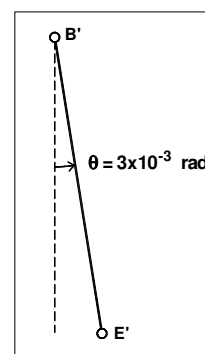


Figura 2



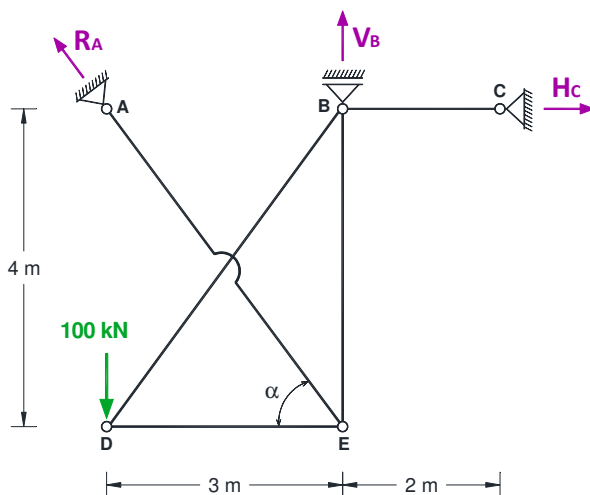
Rotação da barra BE

Figura 3

RESOLUÇÃO

Alínea a)

• Reações nos apoios



$$\alpha = \arctg \frac{4}{3} \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0,6 \\ \sin \alpha = 0,8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \Rightarrow -R_A \cos \alpha + H_C = 0 \\ \sum M_A = 0 \Rightarrow 3 V_B = 0 \\ \sum M_E = 0 \Rightarrow 100 \times 3 - 4 H_C = 0 \end{cases}$$

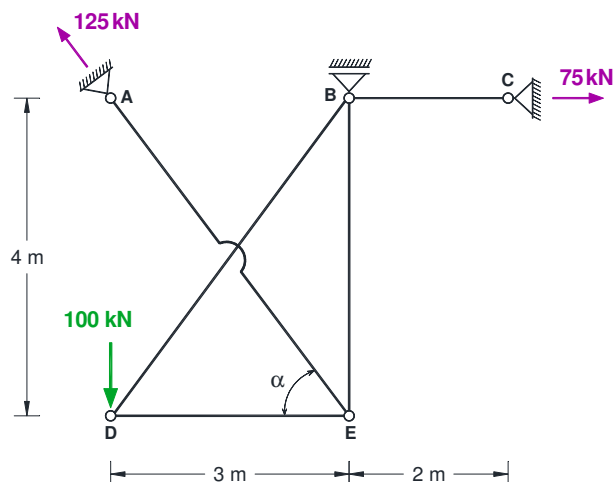
$$\begin{cases} R_A = 125 \text{ kN} \nearrow \\ V_B = 0 \\ H_C = 75 \text{ kN} \rightarrow \end{cases}$$

• Sistema real - esforços instalados nas barras

$$\alpha = \arctg \frac{4}{3} \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0,6 \\ \sin \alpha = 0,8 \end{cases}$$

Nó A $\Rightarrow N_{AE} = 125 \text{ kN}$ (tração)

Nó C $\Rightarrow N_{BC} = 75 \text{ kN}$ (tração)



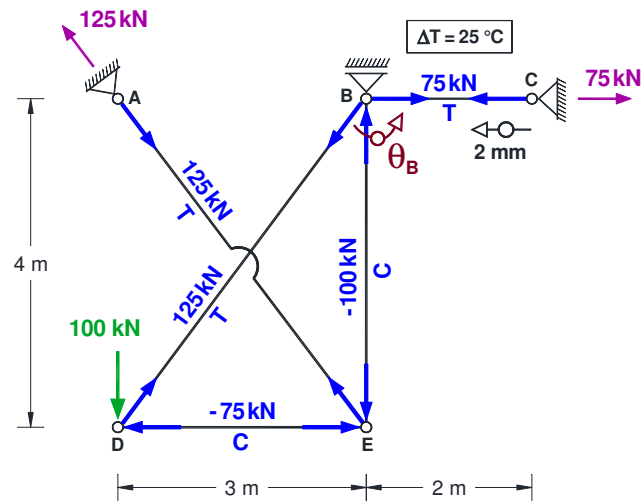
Nó D

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_{DE} - N_{AD} \cos \alpha = 0 \\ N_{AD} \sin \alpha - 100 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_{DE} = -75 \text{ kN (comp.)} \\ N_{AD} = 125 \text{ kN (tração)} \end{cases}$$

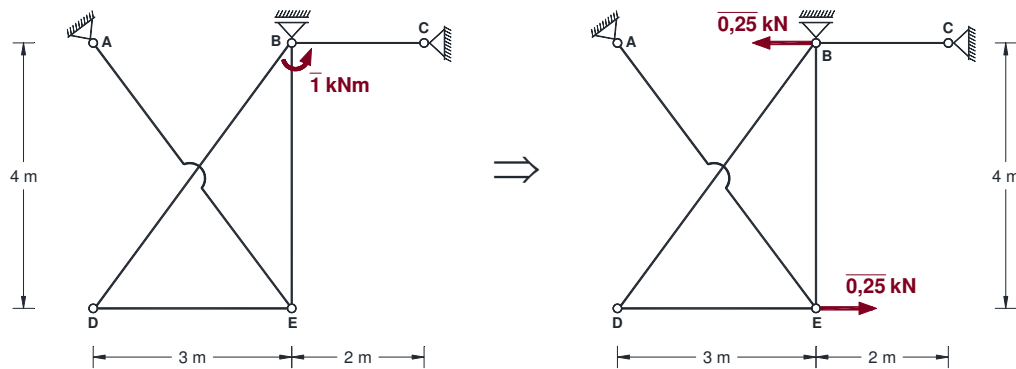
Nó B

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{BE} - 125 \sin \alpha = 0$$

$$N_{BE} = -100 \text{ kN (comp.)}$$



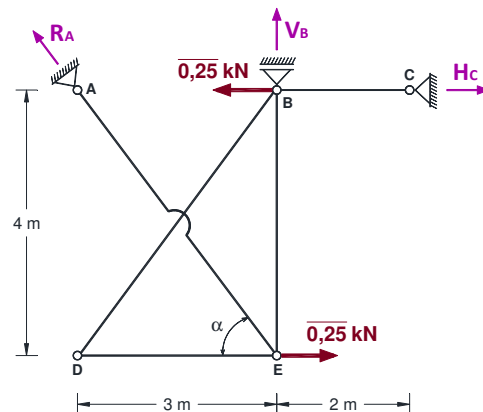
• Sistema auxiliar correspondente à rotação da barra BE



• Sistema auxiliar - esforços instalados nas barras (unidade: kN)

$$\begin{cases} \sum F_X = 0 \Rightarrow -R_A \cos \alpha + H_C = 0 \\ \sum M_A = 0 \Rightarrow 3 V_B + 0,25 \times 4 = 0 \\ \sum M_E = 0 \Rightarrow 0,25 \times 4 - 4 H_C = 0 \end{cases}$$

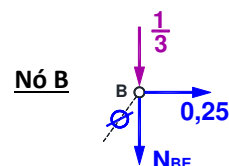
$$\begin{cases} R_A = \frac{1,25}{3} \text{ kN} \nearrow \\ V_B = -\frac{1}{3} \text{ kN} \downarrow \\ H_C = 0,25 \text{ kN} \rightarrow \end{cases}$$



Nó A $\Rightarrow N_{AE} = \frac{1,25}{3} \text{ kN}$ (tracção)

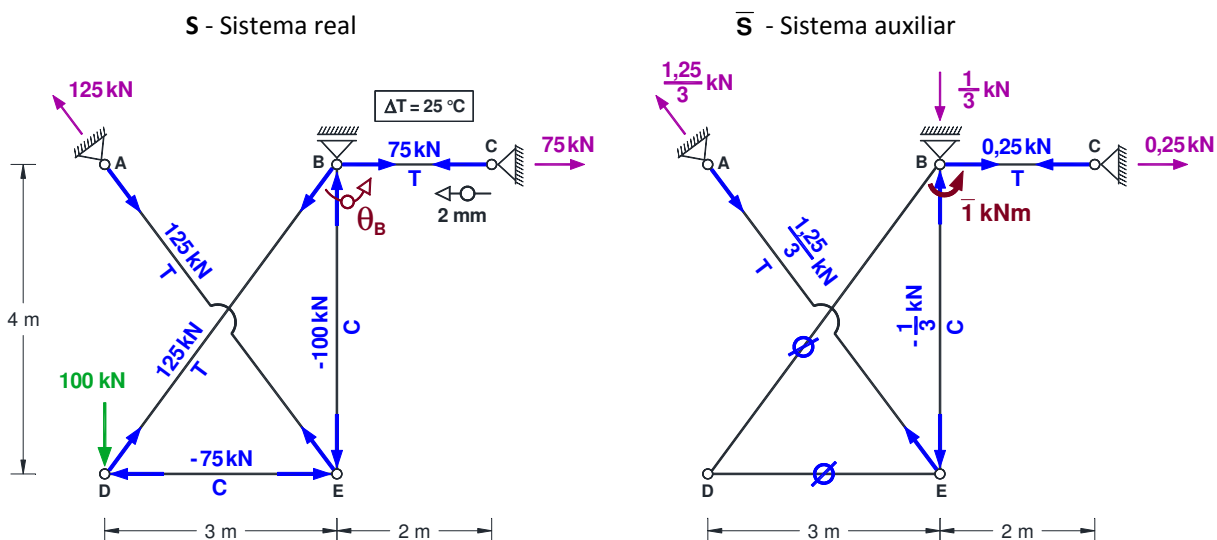
Nó C $\Rightarrow N_{BC} = 0,25 \text{ kN}$ (tracção)

Nó D $\Rightarrow \begin{cases} N_{BD} = 0 \\ N_{DE} = 0 \end{cases}$



$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow -\frac{1}{3} - N_{BE} = 0$$

$$N_{BE} = -\frac{1}{3} \text{ kN (comp.)}$$



$$\bar{1} \times \theta_B + \sum \bar{R} \times \text{assent. apoio} = \sum \bar{N} \frac{NL}{EA} + \sum \bar{N} \alpha \Delta T L$$

BARRAS	L (m)	EA (kPa x m ²)	N (kN)	$\bar{N}$ (kN)	$\bar{N} \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot L$	$\bar{N} \frac{NL}{EA}$
AE	5	8×10^4	125	$\frac{1,25}{3}$	0	$\frac{97,65625}{3} \times 10^{-4}$
BC	2	8×10^4	75	0,25	$1,875 \times 10^{-4}$	$4,6875 \times 10^{-4}$
BD	5	8×10^4	125	0	0	0
BE	4	8×10^4	-100	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{50}{3} \times 10^{-4}$
DE	3	8×10^4	-75	0	0	0
Σ					$1,875 \times 10^{-4}$	$53,90625 \times 10^{-4}$

$$\sum \bar{R} \times \text{assent. apoio} = -0,25 \times 0,002 = -0,0005 = -5 \times 10^{-4}$$

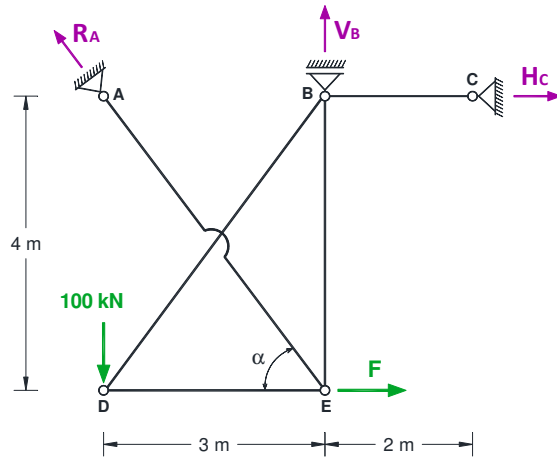
$$\bar{1} \times \theta_B + \sum \bar{R} \times \text{assent. apoio} = \sum \bar{N} \frac{NL}{EA} + \sum \bar{N} \alpha \Delta T L$$

$$\theta_B - 5 \times 10^{-4} = 53,90625 \times 10^{-4} + 1,875 \times 10^{-4}$$

$$\theta_B = 60,78 \times 10^{-4} \text{ rad} = 6,08 \times 10^{-3} \text{ rad} \curvearrowright$$

Alínea b)

• Reações nos apoios



$$\begin{cases} \sum F_X = 0 \Rightarrow -R_A \cos \alpha + H_C + F = 0 \\ \sum M_A = 0 \Rightarrow 3 V_B + 4 F = 0 \\ \sum M_E = 0 \Rightarrow 100 \times 3 - 4 H_C = 0 \end{cases}$$

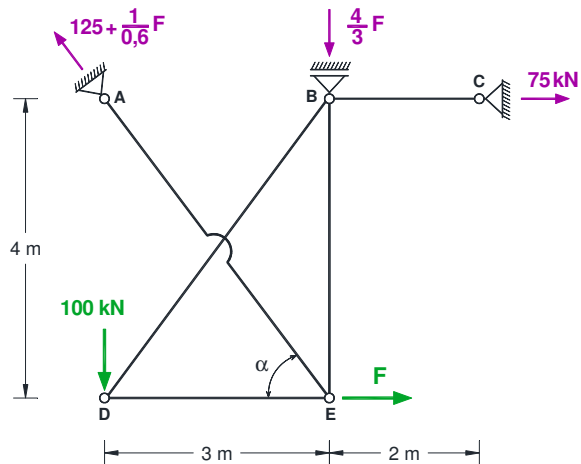
$$\begin{cases} R_A = 125 + \frac{1}{0,6} F \text{ kN} \nearrow \\ V_B = -\frac{4}{3} F \text{ kN} \downarrow \\ H_C = 75 \text{ kN} \rightarrow \end{cases}$$

• Sistema real - esforços instalados nas barras

$$\alpha = \arctg \frac{4}{3} \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0,6 \\ \sin \alpha = 0,8 \end{cases}$$

Nó A $\Rightarrow N_{AE} = 125 + \frac{1}{0,6} F \text{ kN}$ (tração)

Nó C $\Rightarrow N_{BC} = 75 \text{ kN}$ (tração)



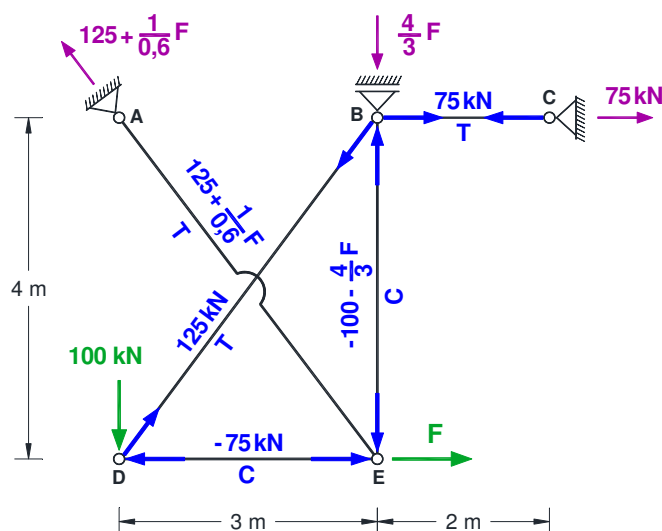
Nó D

$$\begin{cases} \sum F_X = 0 \\ \sum F_Y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_{DE} - N_{AD} \cos \alpha = 0 \\ N_{AD} \sin \alpha - 100 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_{DE} = -75 \text{ kN (comp.)} \\ N_{AD} = 125 \text{ kN (tração)} \end{cases}$$

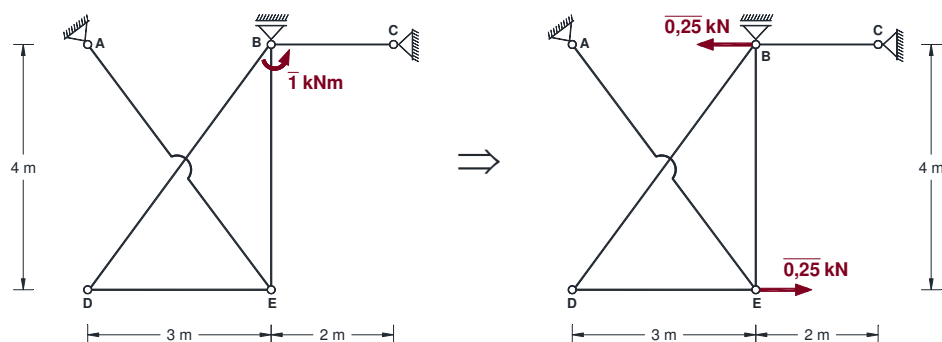
Nó B

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow -\frac{4}{3} F - N_{BE} - 125 \sin \alpha = 0$$

$$N_{BE} = -100 - \frac{4}{3} F \text{ kN (comp.)}$$



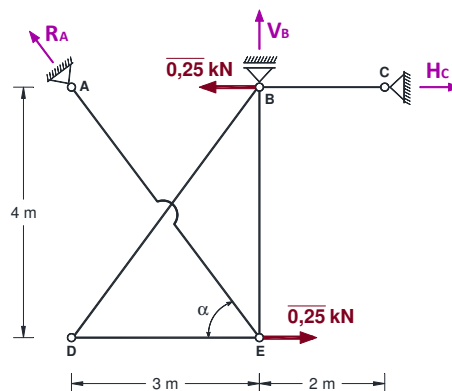
• Sistema auxiliar correspondente à rotação da barra BE



• Sistema auxiliar - esforços instalados nas barras (unidade: kN)

$$\begin{cases}
 \sum F_x = 0 \Rightarrow -R_A \cos \alpha + H_C = 0 \\
 \sum M_A = 0 \Rightarrow 3 V_B + 0,25 \times 4 = 0 \\
 \sum M_E = 0 \Rightarrow 0,25 \times 4 - 4 H_C = 0
 \end{cases}$$

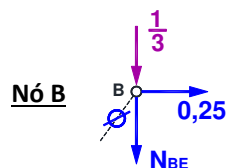
$$\begin{cases}
 R_A = \frac{0,25}{0,6} \text{ kN} \nearrow \\
 V_B = -\frac{1}{3} \text{ kN} \downarrow \\
 H_C = 0,25 \text{ kN} \rightarrow
 \end{cases}$$



Nó A $\Rightarrow N_{AE} = \frac{0,25}{0,6} \text{ kN}$ (tracção)

Nó C $\Rightarrow N_{BC} = 0,25 \text{ kN}$ (tracção)

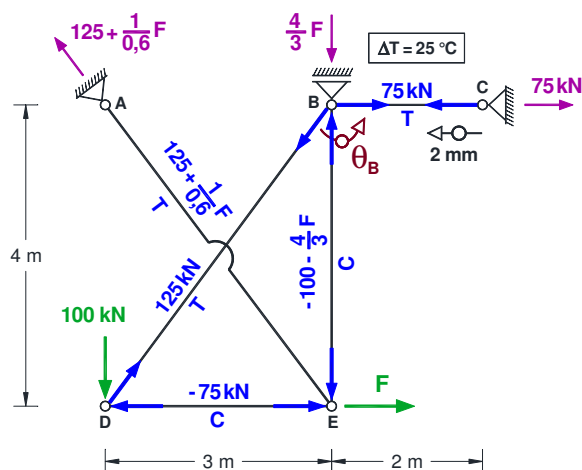
Nó D $\Rightarrow \begin{cases} N_{BD} = 0 \\ N_{DE} = 0 \end{cases}$



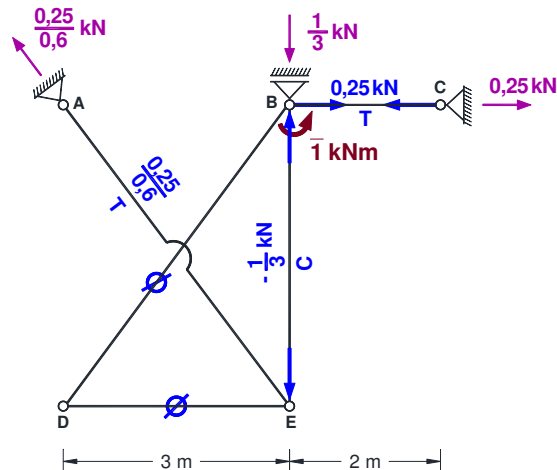
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -\frac{1}{3} - N_{BE} = 0$$

$$N_{BE} = -\frac{1}{3} \text{ kN (comp.)}$$

S - Sistema real



$\bar{S}$ - Sistema auxiliar



$$\bar{1} \times \theta_B + \Sigma \bar{R} \times \text{assent. apoio} = \Sigma \bar{N} \frac{NL}{EA} + \Sigma \bar{N} \alpha \Delta T L$$

BARRAS	L (m)	EA (kPa x m ²)	N (kN)	$\bar{N}$ (kN)	$\bar{N} \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot L$	$\bar{N} \frac{NL}{EA}$
AE	5	8×10^4	$125 + \frac{1}{0,6}F$	$\frac{0,25}{0,6}$	0	$\left[\frac{19,53125}{0,6} + \frac{0,15625}{0,36}F \right] \times 10^{-4}$
BC	2	8×10^4	75	0,25	$1,875 \times 10^{-4}$	$4,6875 \times 10^{-4}$
BD	5	8×10^4	125	0	0	0
BE	4	8×10^4	$-100 - \frac{4}{3}F$	$-\frac{1}{3}$	0	$\left[\frac{50}{3} + \frac{2}{9}F \right] \times 10^{-4}$
DE	3	8×10^4	-75	0	0	0
Σ					$1,875 \times 10^{-4}$	$(53,90625 + 0,65625 F) \times 10^{-4}$

$$\theta_B = 3 \times 10^{-3} \text{ rad} = 30 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

$$\Sigma \bar{R} \times \text{assent. apoio} = -0,25 \times 0,002 = -0,0005 = -5 \times 10^{-4}$$

$$\bar{1} \times \theta_B + \Sigma \bar{R} \times \text{assent. apoio} = \Sigma \bar{N} \frac{NL}{EA} + \Sigma \bar{N} \alpha \Delta T L$$

$$30 \times 10^{-4} - 5 \times 10^{-4} = (53,90625 + 0,65625 F) \times 10^{-4} + 1,875 \times 10^{-4}$$

$$F = -46,90 \text{ kN} \quad \leftarrow$$